

АЕРОФОТОЗНІМАННЯ

УДК 519.23.2;528.85/87

ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ОБЧИСЛЮВАНЬ СПЕКТРІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ЗГЛАДЖУВАЛЬНИХ ВІКОН

© Акулова Л.В., 1999

ДУ "Львівська політехніка"

Рассмотрены вопросы планирования точности вычисления спектрально-энергетических характеристик для прямоугольного, косинусного и косинусного с основанием спектральных окон. Получены выражения для определения коэффициентов изменения дисперсии для косинусного и косинусного с основанием спектральных окон. Вычислены величины коэффициентов изменения дисперсии и коэффициентов вариации для некоторых наиболее распространенных факторов усреднения. Предложена методика планирования эксперимента для обеспечения желаемой точности его результатов.

The accuracy guaranteeing problems of the physical process experimental investigations are considered. The comparative of the right -angled, cosine and cosine with base spectral windows are discussed. The formulas of the change dispersion factor for the cosine and cosine with base spectral windows are derived. The method of the planning experiment for requirement accuracy guaranteeing is offered.

Основною проблемою при експериментальних дослідженнях і створенні та експлуатації систем цифрової обробки інформації, зокрема геоінформаційних систем, є забезпечення необхідної точності вимірювань. Трудомісткість, складність та висока вартість більшості експериментів потребує попереднього оцінювання точності вимірювань для визначення оптимальних умов їх виконання та вимог до обладнання, яке потрібне для виконання експерименту. Відомо, що однією з найважливіших характеристик випадкового процесу є спектр, тому формування вимог для отримання достовірної спектральної оцінки повністю забезпечує надійність оцінювання усіх характеристик досліджуваного процесу.

Тут подається аналіз точності спектральної обробки, орієнтований на застосування при обчислюванні спектральних характеристик алгоритму Сенді-Т'юки, який є однією з відомих і найрозвиненіших модифікацій швидкого перетворення Фур'є [1]. Використання стандартного спектроаналізатора БПФ-2М [2] зумовило типи застосованих тут згладжувальних вікон.

Як правило, наявність методичної похибки зумовлена недосконалістю методу оцінювання спектральних характеристик, але таке її визначення загалом є умовним, бо здебільшого неможливо провести декомпозицію загальної похибки на методичну та

апаратну. Для оцінювання точності обчислювань застосовуються практичні положення теорії оцінювання та статистичних висновків в припущені стаціонарності та ергодичності досліджуваного випадкового процесу [3]. На практиці стаціональність випадкового процесу досягається шляхом вилучення нестаціонарних компонент сигналу попередньою фільтрацією [4]. Виникнення методичної похибки при цьому зумовлено застосуванням орієнтованого на роботу з нескінченними та неперервними часовими рядами математичного апарату для реалізації аналогічних обчислювань по скінченних та дискретних числових послідовностях, якими описується сигнал.

Визначення точності оцінок $\hat{G}_{XX}(f)$ спектральних щільностей $G_{XX}(f)$, далі – просто спектрами, випадкового процесу $X(f)$ циклічної частоти f проводилось з використанням таких величин [5]:

$$\text{дисперсії} \quad \text{Var}\left[\hat{G}_{XX}(f)\right] = E\left[\left(\hat{G}_{XX}(f) - E\left[\hat{G}_{XX}(f)\right]\right)^2\right];$$

$$\text{зсуву} \quad b\left[\hat{G}_{XX}(f)\right] = E\left[\hat{G}_{XX}(f)\right] - G_{XX}(f);$$

$$\text{середньоквадратичної помилки} \quad \psi^2\left[\hat{G}_{XX}(f)\right] = \sqrt{\text{Var}\left[\hat{G}_{XX}(f)\right] + b^2\left[\hat{G}_{XX}(f)\right]};$$

а також їх нормованих величин:

$$\text{стандартної нормованої помилки або коефіцієнта варіації} \quad \varepsilon_r = \frac{\text{Var}\left[\hat{G}_{XX}(f)\right]}{G_{XX}(f)};$$

$$\text{нормованої помилки зсуву} \quad \varepsilon_b = \frac{b\left[\hat{G}_{XX}(f)\right]}{G_{XX}(f)};$$

$$\text{нормованої середньоквадратичної помилки} \quad \varepsilon = \frac{\psi^2\left[\hat{G}_{XX}(f)\right]}{G_{XX}(f)}.$$

Значення оцінок $\hat{G}_{XX}(f)$ з умовою забезпечення стійкості, точності та надійності результатів обчислювань повинні задовільняти такі вимоги [6]:

$$\text{оцінки мають бути обґрунтованими, тобто} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\hat{G}_{XX}(f) \right] = G_{XX}(f);$$

$$\text{зсув в оцінках має бути відсутнім, тобто} \quad E\left[\hat{G}_{XX}(f)\right] = G_{XX}(f), \text{ при } n \rightarrow \infty;$$

оцінки повинні бути достатніми, тобто не вимагати додаткової інформації про параметр, що оцінюється;

оцінки повинні бути ефективними серед усього класу оцінок $G_{XX_k}(f) \in k$,

$$\text{тобто } E \left[\hat{G}_{XX}(f) - G_{XX}(f) \right]^2 \geq E \left[\hat{G}_{XX_k}(f) - G_{XX}(f) \right]^2.$$

Повніше точність вимірювань оцінюється середньоквадратичною помилкою, яка містить в собі як випадкову (дисперсію), так і систематичну (зсув) компоненти похибки, що зумовлюють, відповідно, стійкість та спотворення спектральних оцінок, тому доцільно є процедура її мінімізації за формулою

$$\psi^2 \left[\hat{G}_{XX}(f) \right] = \sqrt{\frac{G_{XX}^2(f)}{B_e T} + \left[\frac{B_e^2 G_{XX}''(f)}{24} \right]}, \quad (1)$$

де B_e – частотний діапазон аналізу; T – тривалість реалізації.

Загалом оцінки $\hat{G}_{XX}(f)$ не є обґрунтованими, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\hat{G}_{XX}(f) \right] \neq G_{XX}(f)$,

та згідно з (1) неефективні і мають зсув, які визначаються відповідно першою та другою складовими підкореневого виразу.

Підвищення ефективності можна досягти, застосовуючи усереднення – сегментацію досліджуваної реалізації на окремі блоки. Ця процедура дає змогу зменшити дисперсію, тобто підвищити ефективність оцінок у стільки разів, яка б дорівнювала кількості блоків (фактора усереднення M), але зсув при цьому дещо збільшується.

Подальше поліпшення оцінок полягає в боротьбі з розтіканням і досягається застосуванням згладжувальних вікон [7], які характеризуються коефіцієнтами зміни дисперсії α та зсуву ζ . При цьому необхідно вважати, що наведені нижче висновки є справедливими для стаціонарного процесу з дуже вираженою ергодичністю [8].

Аналіз зсуву, який визначається за формулою

$$b_S \left[\bar{G}_{XX}(f) \right] = \zeta_S b \left[\hat{G}_{XX}(f) \right],$$

де S – тип згладжувального вікна, достатньо якісного аналізу поведінки спектра. Відповідно до (1) величина зсуву визначається як

$$b \left[\hat{G}_{XX}(f) \right] \approx \frac{B_e^2}{24} G_{XX}''(f),$$

тобто зсув здебільшого залежить від частотного діапазону аналізу B_e . Друга похідна зумовлює "ізрізаність" спектра в межах смуги B_e . Знак цієї похідної в околі екстремумів зумовлює заниження спектральної оцінки в області піків та завищення її в області западин. При цьому величина зсуву буде більшою при меншій ширині піка або западини.

Дисперсію згладженої спектральної оцінки $\hat{G}_{XX}(f)$ при застосуванні спектральних вікон наближено можна визначити як

$$\text{Var}[\hat{G}_{XX}(f)] \approx \alpha_S \text{Var}[G_{XX}(f)].$$

Розглянемо точність обчислювань при застосуванні трьох типів згладжувальних вікон (S): прямокутного ($S=1$); косинусного ($S=2$); косинусного з основою ($S=3$), характеристики яких подані у табл. 1.

Таблиця 1

Властивості спектральних вікон

Тип вікна	Формула вікна	Коефіцієнт зміни дисперсії
$S=1$	$w_1(t) = 1$	$a_1 = \frac{1}{M}$
$S=2$	$w_2(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right)\right)$	$a_2 = \frac{0,472}{M}$
$S=3$	$w_3(t) = w_2(t) + 0,0312$	$a_3 = \frac{0,5072}{M}$

Значення коефіцієнта α_2 одержане чисельним інтегруванням виразу, до якого зводиться $w_2(t)$, після замін та підстановок. За даними табл. 1, зрозуміло, що найбільше зниження дисперсії при інших рівних умовах забезпечується згладжуванням оцінки за косинусним вікном. Для прямокутного вікна зсув практично відсутній, проте наявність бічних пелюсток у деяких випадках погіршує частотну характеристику [8]. Відомо, що однією з властивостей тригонометричних вікон є майже повне подавлення бічних пелюсток. Для косинусного з основою вікна наявність основи в деяких випадках практично усуває зсув. Крім того, кожне вікно має різноманітні властивості, які досліджувають застосовуючи залежно від характеру процесу.

Основною метою даної роботи є визначення порівняльних характеристик спектральних вікон. Для цього були обчислені за даними табл. 1 коефіцієнти зміни дисперсії залежно від фактора усереднення. Практично доведено, що фактор усереднення найдоцільніше визначати як $M = 2^k$. Отримані величини коефіцієнтів зміни дисперсії α_S при різних k подані у табл. 2.

Проведемо аналіз випадкової складової похибки оцінки спектра ε_r – коефіцієнта варіації, який обчислюється за формулою

$$\varepsilon_r \approx \frac{1}{B_e T}.$$

та визначає статистичну стійкість спектральних оцінок.

Таблиця 2

Коефіцієнти зміни дисперсії α_s для спектральних вікон залежно від фактора усереднення M

Тип вікна	Фактор усереднення M									
	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
$S=1$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0312	0,0156	0,0078	0,0039	0,0020
$S=2$	0,472	0,236	0,118	0,059	0,0295	0,015	0,0073	0,0037	0,0018	0,0009
$S=3$	0,5032	0,2516	0,1258	0,0629	0,0315	0,0157	0,0077	0,0039	0,0020	0,0010

Для згладжених спектральних оцінок в припущенні їх відповідності χ^2 -розподілу коефіцієнт варіації спрошується до вигляду:

$$\varepsilon_r = \sqrt{\alpha_s}.$$

Величини коефіцієнтів варіації для досліджуваних типів вікон при факторах усереднення, що подані у табл. 2, зведені у табл. 3.

Таблиця 3

Коефіцієнти варіації ε_r для згладжувальних вікон залежно від фактора усереднення M

Тип вікна	Фактор усереднення M									
	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
$S=1$	1	0,1071	0,5	0,3535	0,25	0,1768	0,125	0,0883	0,0625	0,0442
$S=2$	0,687	0,486	0,3435	0,2429	0,1718	0,1214	0,086	0,0608	0,0424	0,03
$S=3$	0,7094	0,5016	0,3547	0,2580	0,1775	0,1253	0,0877	0,0625	0,0447	0,0316

Застосовуючи табл. 2 та 3 можна виконувати попереднє планування умов експерименту для досягнення необхідної точності, тобто при заданому коефіцієнти варіації вибирати тип спектрального вікна та обчислювати попереднє значення довжини реалізації сигналу за формулою

$$T = \frac{1}{B_e \varepsilon_r^2}. \quad (2)$$

Але проведення таких розрахунків має бути орієнтовано на природу досліджуваного сигналу і, зважаючи на реальні умови експерименту, визначати таку довжину вихідної реалізації, для якої можуть бути отримані найкращі спектральні оцінки без порушення вимог до застосування відповідного математичного апарату.

За отриманими в експерименті даними по закінченні спектральної обробки визначаються інтервали довіри, в які з заданою ймовірністю попадає спектр $G_{XX}(f)$

оцінки $\hat{G}_{XX}(f)$. Ці висновки справедливі лише для спектральних оцінок, які підлягають χ^2 -розподілу.

Для аналізу точності експерименту за одержаними в результаті спектральної обробки оцінками можуть бути побудовані інтервали довіри [10]:

з ймовірністю довіри 68% –

$$\frac{\bar{G}_{XX}(f)}{1+\varepsilon_r} \leq G_{XX} \leq \frac{\bar{G}_{XX}(f)}{1-\varepsilon_r}; \quad (3)$$

з ймовірністю довіри 95% –

$$\frac{\bar{G}_{XX}(f)}{1+2\varepsilon_r} \leq G_{XX} \leq \frac{\bar{G}_{XX}(f)}{1-2\varepsilon_r}. \quad (4)$$

Вирази (3) та (4) залишаються справедливими для малих стандартних помилок і для випадків, коли справжній розподіл оцінки $G_{XX}(f)$ відрізняється від прийнятого при доведенні формул закону розподілу ймовірностей.

Відповідно до сказаного вище, пропонується така методика оцінки спектрів з заданою точністю. Досліджувач перед експериментом, враховуючи природу процесу, що аналізується, визначає частотний діапазон аналізу B_e та корегує його відповідно до параметрів обладнання, яке буде використане для експерименту та обробки його результатів. Згідно з параметрами обладнання, фізичними характеристиками процесу дослідження та вимогами до бажаної точності визначається орієнтовна довжина реалізації за формулою (2). Далі за даними табл. 2 та 3 з врахуванням вимог до точності вибираються тип спектрального вікна та фактор усереднення. Далі за вибраними даними за формулою (2) обчислюється попереднє значення довжини реалізації і виконується аналіз властивостей вибраного типу спектрального вікна з врахуванням особливостей фізичного процесу. При уточненні величини фактора усереднення необхідно вважати, що збільшення його при обмеженій тривалості реалізації може привести до втрати сегментом фізичних властивостей загального процесу.

На наступному етапі з табл.3 за вибраними фактором усереднення та типом спектрального вікна визначають коефіцієнт варіації, після чого уточнюється по (2) тривалість реалізації T , за якою планується експеримент.

По завершенні експерименту за вибраними параметрами M та S виконуються обчислювання спектральних оцінок для даних, що отримані експериментально. Далі за формулами (3) і (4) визначається інтервал довіри, до якого з заданою ймовірністю потрапляє спектр процесу, що аналізується. Така методика оцінки є зручною і її можна застосовувати при багатьох дослідженнях через простоту та порівняно незначний обсяг обчислювальних робіт.

1. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. М., 1983.
2. Спектроанализатор БПФ-2М // Инструкция по эксплуатации. ГБ2.747.0144Э. Львов, 1986.
3. Кузьмичев Д.А., Радкевич И.И., Смирнов А.Д. Автоматизация экспериментальных исследований. М., 1983.
4. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложение. М. 1972. № 1. 318 с.
5. Боровков А.А. Математическая статистика.

Оценка параметров. М., 1984. 6. Закс Л. Статистическое оценивание. М., 1976. 7. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при анализе методом дискретного преобразования Фурье. ТИИЭР. Т. 66. № 1. 1976. С.60–96. 8. Мартин Р.Д., Томпсон Д. Дж. Проблемы устойчивости и стойкости оценок спектральной плотности. ТИИЭР. Т.70. № 9, 1982. С.220–243. 9. Макклеллан Дж. Многомерный спектральный анализ. ТИИЭР. Т.70. № 9, 1982. С.139-152. 10. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных процессов / Пер. с англ. М., 1989.