

А.Л. ОСТРОВСЬКИЙ

Національний університет "Львівська політехніка"

ВІВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ ВИЗНАЧЕННЯ АНОМАЛЬНОЇ ВЕРТИКАЛЬНОЇ РЕФРАКЦІЇ НА ОСНОВІ ТЕОРИЇ ТУРБУЛЕНТНОСТІ АТМОСФЕРИ

© Островський А.Л., 2003

На основе теории турбулентности Монина – Обухова доказывается теорема: средняя аномальная вертикальная рефракция за 1–2 с времени равна максимальной амплитуде колебаний визирной цели за это же время. Теорема проверена экспериментально.

Критикуются ошибочные формулы аномальной рефракции.

The following theorem was proved on the basis of Monin-Obuhov theory of turbulence: mean anomalous vertical refraction within time span 1–2 sec. is equal to maximal amplitude of a target oscillation within the same time span. The theorem was examined experimentally. The mistaken formulas of anomalous refraction were criticized.

Короткий історичний нарис

Земна вертикальна рефракція вивчається протягом майже 390 років. Піонерами цих досліджень були видатні вчені: творець законів заломлення світла та методу тріангуляції (1614 р.) голландець Віліброрд Снелліус, академік, француз Жан Пікар та багато інших.

Незважаючи на надзвичайно довготривалі дослідження проблеми рефракції, не знайдено її остаточного розв'язку і на сьогодні. Проблема виявилась такою ж складною, як і прогноз погоди.

50 років серед інших дослідників цієї проблеми працює Львівська школа рефракції. Вістря досліджень було спрямоване на рефрактометрію, тобто на пошуки методів виключення спотворень астрономо-геодезичних вимірювань непрямолінійністю та нерівномірністю розповсюдження електромагнітних хвиль (ЕМХ), викликаних просторовою неоднорідністю густини та показника заломлення атмосфери.

Саме в рефрактометрії Львівська школа рефракції має певні успіхи, відомі як в Україні, так і за її межами.

Проте досягнення цих успіхів проходило у важких пошуках істини, з неминучими блуканнями та помилками, з відступами та проривами. Розглянемо в статті тільки пошуки методів визначення земної вертикальної рефракції. Це питання є незначною, проте важливою частиною рефрактометрії, оскільки вертикальна рефракція значно, до мінут дуги, може спотворювати вимірювання вертикальних кутів.

Вертикальну рефракцію виявилось доцільним розділити на нормальну та аномальну частини.

Визначення нормальної складової рефракції давно реалізовано. Нормальну вертикальну рефракцію достатньо точно (до 0,1 секунди дуги) можна знайти за формулою

$$\delta_n = 0.198 \frac{P}{T^2} L. \quad (1)$$

Розроблені уточнення формул (1). Не в цьому проблема! Проблема у визначенні аномальної рефракції. Ця складова частина рефракції визначається за формулою

$$\delta_{\text{ан.сер}} = 8.132 \frac{P}{T^2} L \gamma_{\text{ан.ек.сер}}, \quad (2)$$

де

$$\gamma_{\text{ан.ек.сер}} = \frac{2}{L^2} \int_0^L \gamma_{\text{ан.сер}} l dl. \quad (3)$$

У формулах (1)–(3) P та T відповідно тиск в мб (в hPa) та температура в шкалі Кельвіна; L – довжина лінії розповсюдження ЕМХ в м.; dl – нескінченно малі відрізки, в яких потрібно знати аномальні (точкові) вертикальні градієнти температури – $\gamma_{\text{ан.сер}}$; l – віддаль від візорної цілі до біжучої точки інтегрування: $\delta_{\text{ан.сер}}$ – середня аномальна рефракція за проміжок часу наведення зорової труби на візорну ціль (1–2 с); $\gamma_{\text{ан.ек.сер}}$ – аномальний, еквівалентний середній градієнт температури за цей самий проміжок часу. Підкреслимо, що три, тільки що згадані параметри, названі середніми, щоб відрізняти їх від миттєвих значень. Як видно з (3) $\gamma_{\text{ан.ек.сер}}$ – інтегральне, середнє вагове значення градієнта. При цьому, $\gamma_{\text{ан.сер}}$ має тим більшу вагу (вага – добуток $l \cdot dl$), чим біжче біжуча точка інтегрування до теодоліта.

Трудність вирішення проблеми визначення рефракції саме в необхідності одночасно знати $\gamma_{\text{ан.сер}}$ в багатьох точках траси L . Вимірюти $\gamma_{\text{ан.сер}}$ в множині точок траси – трудоємно, дорого, а, якщо частина траси проходить на значній висоті над поверхнею Землі – майже неможливо.

У 50-ті роки минулого століття О.О. Ізотов, Л.П. Пеллінен, шукаючи вирішення цієї проблеми, ввели поняття еквівалентної висоти – h_e і замінили $\gamma_{\text{ан.ек.сер}}$ на

$$\gamma_{\text{ан.ек.сер}} = C_1 h_e^{-\alpha}, \quad (4)$$

де C_1 – градієнт температури, виміряний на висоті 1 м над підстелюючою поверхнею. При цьому

$$h_e = \frac{2}{L^2} \int_0^L h dl, \quad (5)$$

тобто, h_e – не середня, а середня вагова висота променя, яку можна обчислити за профілем траси, побудованим на основі топографічної карти.

Відповідно до (4) формула (2) набуває вигляду

$$\delta_{\text{ан.сер}} = 8.132 \frac{P}{T^2} L \frac{C_1}{h_e^\alpha}. \quad (6)$$

Здавалось би проблема вирішена. Однак C_1 – змінна величина, а виміряне значення C_1 над якоюсь однією поверхнею не дає інформації про градієнти над іншими підстелюючими поверхнями; до того ж степінь “ α ” в формулі (4) – невідомий, залежний від стратифікації повітря в його нижніх прошарках. Так що формула (6) може дати тільки наближені результати.

Взагалі рефракція – явище внаслідок дії якого, ми бачимо віддалені предмети не там, де вони фактично знаходяться. У термічно турбулентній атмосфері аномальна рефракція флюктує, що приводить до коливання зображень предметів, які розглядаються зоровими трубами. На зв’язок між коливаннями зображень та рефракцією вперше звернув увагу В.Я. Струве, ще в середині XIX століття. На такий же зв’язок, незалежно, хоча значно пізніше (1964 р.) вказав доц. Л.С. Хижак, вивчаючи бокову рефракцію. Виникає запитання: чи не можна визначити аномальну рефракцію за її флюктуаціями? У 1980 р. П.В. Павлів опублікував монографію: “Проблеми високоточного нівелювання”, в якій виклав розроблений ним метод виміру коливань зображень. У 1983 р. І.І. Стацишин захистив кандидатську дисертацію на тему: “Разработка и исследование методов учета нивелирной рефракции в турбулентной атмосфере”. У 1987 р. П.В. Павлів захистив докторську дисертацію, в якій визначеню рефракції приділялось найбільше уваги.

Найважливішим, що було в цих дослідженнях: експериментальне доведення формули

$$r_{\text{ан}} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{2}, \quad (7)$$

де r_{an} – лінійна аномальна рефракція, σ_{max} – максимальний лінійний розмах коливань (подвійна амплітуда). Тє, що в формулі (7), не фігурує довжина траси L та еквівалентна висота h_e^b не є недоліком формули. Лінійна рефракція – $r_{an,i}$ і максимальний лінійний розмах коливань $\sigma_{max,i}$ характеризують тільки цю трасу, довжиною L_i .

Так що формула (7), запропонована Павлівим П.В., вирішує питання визначення лінійної аномальної рефракції при геометричному нівелюванні.

Проте, аналітично ця формула не була доведена. Немає її теоретичного доведення і в [1,2] – останніх статтях Джумана Б.М., який пише в них, що ця формула приблизна і емпірична.

У 1990 р. Джуман Б.М. у докторській дисертації пропонує іншу формулу, яка має вигляд

$$\delta_{an} = 0,05\sigma_{max} \cdot L^{1/2} h^{-1/2}. \quad (8)$$

Цю формулу, як тепер стало очевидно, насправді не можна довести, оскільки при її виведенні вкралися помилки, про які йтиметься далі. У той час у нас не було сумнівів у цій формулі. Першим, хто звернув увагу у 1991 р. на те, що формула (8) не працює, був докторант А.С. Суянов. Він перевіряв цю формулу на основі експериментальних досліджень, поставлених у 1986 р. Працівниками наукової експедиції кафедри геодезії (А.Л. Островський, С.Г. Власенко, В.М. Колгунов) НУ “Львівська політехніка” разом із працівниками кафедри геодезії Самаркандського державного архітектурно-будівельного інституту. Експериментальні дослідження ставились на геодинамічному полігоні, розташованому у пустелі Кара-Кум (Кашкадар'їнська область, Узбекистан). Теоретичні зенітні кути були наперед відомі з точністю не грубіше 0,1''. Різниці між теоретичними та вимірюваними зенітними кутами, як відомо, дають значення рефракції – δ''_{sep} . Нормальну рефракцію розраховували за формuloю (1). Тоді аномальну рефракцію $\delta_{an,sep}$ знайдемо як різницю $\delta''_n - \delta''_{sep}$. Також вимірювали коливання (флуктуації) зображені візорних циліндрів. Все це дало можливість перевірити достовірність як формули (8), так і інших формул рефракції. З'ясувалось, що формула (8) не працює. Але чому?

1991–1995 рр. для нас були роками пошуків теорії флуктуаційного методу та експериментального дослідження точності цього методу. Була розроблена теорія флуктуаційного методу, основана на законах Архімеда та Ньютона, яка вперше була опублікована у 1995 р. окремим виданням в Узбекистані [5].

До 1997 р. ця теорія була вдосконалена і опублікована [6] в журналі “Reports on GEODESY”, Варшавської політехніки, Польща.

Взагалі, після 1995 р. на цю тему опубліковано десятки праць, наприклад [7, 8, 10], узагальнена теорія рефракції та турбулентності [4]. З критикою формули (8) виступили деякі автори [9, 13, 14]. Отримані авторські свідоцтва на флуктуаційний метод визначення рефракції (О.І. Мороз). Опубліковані праці стосовно флуктуаційного методу в Австрії, Франції, Голландії, Росії. Здавалось би настав час припинити дискусії. Однак єдиної думки стосовно достовірності формул флуктуаційного методу врахування рефракції і в наш час немає. Більше того, існує розбіжність в розумінні дії рефракції на результати астрономо-геодезичних вимірювань:

- на результати вимірювань впливають миттєві значення рефракції – стверджують одні;
- на результати вимірювань впливають середні значення рефракції, оскільки при спостереженнях зорова труба наводиться на середні положення візорної цілі, що коливається – заперечують інші. Така ситуація недопустима!

На жаль, автори формул (7) та (8) відійшли у вічність. Встановити істину необхідно нам – живим.

Виведення формули флуктуаційного методу визначення аномальної вертикальної рефракції на основі теорії турбулентності атмосфери Моніна-Обухова

Флуктуації зображень візорних цілей у турбулентній атмосфері є коротко періодичні рефракційні явища і їх можна точно описувати формулами рефракції (2) і (3). Відомо також, що зі всіх параметрів, що входять у формули (2), (3) при турбулентності флуктують тільки аномальні вертикальні градієнти температури γ_{an} .

Зрозуміло, якщо флуктують градієнти, то флуктує температура – T і тиск P . При цьому, за короткі проміжки часу – одна-декілька секунд, – температура змінюється в таких межах, як і аномальні градієнти температури (на висоті одного метра – не більше 2 К), а тиск змінюється менше 1 мбр, оскільки тиск створює стовп атмосфери, товщиною 11–17 км, а миттєві температурні зміни проходять в тонкому повітряному прошарку тертя. До того ж вертикальні переміщення

частинок майже не змінюють ваги стовпа, що створює тиск. Тому відношення $\frac{P}{T^2}$ можна вважати

сталим протягом до однієї години і таким, що не може викликати миттєві коливання зображень. Це дає можливість формулу (2) записати так:

$$\delta_{an,cep} = C_0 L \gamma_{an,ek,cep}, \quad (9)$$

де

$$8,132 \frac{P}{T^2} = const = C_0. \quad (10)$$

Так що миттєві зміни $\delta_{an,cep}$ є функцією тільки миттєвих змін аномальних температурних градієнтів. Сказане не є оригінальним, новим. Такої ж думки дотримуються метеорологи та фізики атмосфери всіх країн [11, 12].

Важливо встановити, в яких межах проходять коливання градієнтів. Відомо також, що турбулентність атмосфери спричиняє такі переміщення різних за величиною частинок повітря, при яких параметри, що характеризують ці переміщення, зазнають випадкових змін, проте таких, що можна знайти середні значення цих параметрів. Саме завдяки цій особливості турбулентності Моніним-Обуховим була розроблена теорія турбулентності, в якій доведено [3, 11], а саме:

1. При стійкій стратифікації потік тепла $Q < 0$, масштаб висоти $L^* > 0$, масштаб температури $T_* > 0$, а градієнти температури $\gamma > 0$ (температура повітря в нижніх прошарках зростає з висотою); параметр статичної стійкості $\xi > 0$.

При нестійкій стратифікації $Q > 0$, $L^* < 0$, $T_* < 0$, $\gamma < 0$ (температура повітря в нижніх прошарках знижується з висотою); при цьому $\xi < -0,07$.

При байдужій стратифікації, тобто при нормальному стані нижніх прошарків атмосфери $Q \rightarrow 0$, $T_* \rightarrow 0$, $L^* \rightarrow \infty$, а градієнти температури $\gamma \rightarrow \gamma_n = -0,0098$ град/м, де γ_n – нормальний градієнт температури, при цьому ξ прямує до нуля, знаходячись в межах $-0,07 \leq \xi \leq 0$.

Нагадаємо, що, аналізуючи зміну температури і швидкості вітру з висотою Z в приземному прошарку повітря, Монін і Обухов дійшли висновку: безрозмірні температура (тобто відношення T/T_*) і швидкості вітру (відношення C/U_*) є універсальними функціями безрозмірного параметра статичної стійкості

$$\xi = \frac{Z}{L}, \quad (11)$$

де C – швидкість вітру у вільній атмосфері; $Z = h$ – висота точки над поверхнею Землі; L^* – масштаб висоти, що дорівнює

$$L^* = \frac{U_*^2}{\chi \beta T_*}, \quad (12)$$

де U_* – швидкість тертя (масштаб швидкості); T_* – масштаб температури; та же

$$T_* = -\frac{Q_0}{\chi C p \rho_0 U_*}, \quad (13)$$

де uQ_0 – турбулентний потік тепла; $\beta = g/T$ – параметр пливучості (g – прискорення вільного падіння); χ – постійна Кармана, ρ_0 – густина повітря; Cp – теплоємність повітря при постійному тиску.

Градієнт температури γ прямує до нормального градієнта, коли $Q_0 \rightarrow 0$; тоді масштаб T_* також прямує до нуля ($T_0 \rightarrow 0$), а масштаб L^* прямує до безмежності ($L^* \rightarrow \infty$). При цьому параметр стійкості також прямує до нуля $\zeta \rightarrow 0$. Коли $\zeta = 0$, тобто настає байдужий стан атмосфери, тоді $T_* = 0$, $L^* = \infty$, а $\gamma = \gamma_n$.

Коротше кажучи, в теорії турбулентності доведено [11], цитуємо: "умова виникнення флюктуації температури виражується нерівністю"

$$\gamma \neq \gamma_n. \quad (14)$$

Так що термічні флюктуації затухають при градієнтах $\gamma = \gamma_n$. При цьому аномальні градієнти $\gamma_{an} = 0$. Отже, при нестійкій стратифікації градієнти γ_i змінюючись за абсолютною величиною, не міняють знака і гранично $\gamma_i = \gamma_n$, тоді аномальні миттєві градієнти дорівнюють нулю: $\gamma_{an,min} = 0$. Другою границею коливань градієнтів буде $\gamma_{an,max}$. Оскільки ми наводимо трубу теодоліта на середнє положення візирної цілі, що коливається, то цьому положенню відповідає градієнт $\gamma_{an,sep}$:

$$\gamma_{an,sep} = \frac{\gamma_{an,min} + \gamma_{an,max}}{2} = \frac{\gamma_{an,max}}{2}. \quad (15)$$

Звідси зрозуміло, що коли труба наведена на середнє положення цілі, що коливається, то напрямок труби спотворений відповідно до формул (2) або (9) середньою аномальною рефракцією – $\delta''_{an,sep}$. Проте в трубі ми бачимо не $\delta''_{an,sep}$, а розмахи коливань (подвійну амплітуду коливань). При цьому максимальний розмах коливань – σ''_{max} буде (на основі (2) або (9)) дорівнювати

$$\sigma''_{max} = C_0 L \gamma_{an,sep,max}. \quad (16)$$

Або, враховуючи, (15)

$$\sigma''_{max} = C_0 L 2 \gamma_{an,sep}. \quad (17)$$

Розділивши (9) на (16), отримаємо $\frac{\delta''_{an,sep}}{\sigma''_{max}} = \frac{C_0 L \gamma_{an,sep}}{C_0 L \cdot 2 \gamma_{an,sep}} = \frac{1}{2}$.

Так що, дійсно:

$$\delta''_{an,sep} = \frac{1}{2} \sigma''_{max}. \quad (18)$$

Значить, на основі теорії турбулентності доведена теорема: середня аномальна вертикальна рефракція за 1–2 секунди часу дорівнює максимальній амплітуді $\left(\frac{\sigma''_{max}}{2}\right)$ коливань візирної цілі за цей же час.

Ця ж формула отримана в роботі [10] складнішим способом. Між тим, не важко побачити, що формули (6) та (18) – ідентичні. Тільки в (6) рефракція виражена в лінійній мірі (в мм), у (18) – в кутовій (в секундах дуги). Залежність між кутовою і лінійною рефракцією відома: $\frac{r}{L} = \frac{\delta''_{an}}{\rho}$;

$$\frac{\sigma_{max}}{L} = \frac{\sigma''_{max}}{\rho}, \text{ де } L \text{ – довжина шляху EMX.}$$

Розкриття помилок, що трапились при виведенні формул (8)

Для встановлення достовірності формул (8), або (18), достатньо розділити точну формулу рефракції (2) на формули (8), або (18). Якщо в результаті ділення отримаємо одиницю – формули (8) та (18) – достовірні. Якщо ні – необхідно шукати помилки в математичних перетвореннях (викладках) при виведенні цих формул. При складанні відношень (діленні формул) будемо мати на увазі, що формулі (9) та (16) фактично є іншою формою запису формулі (2), тому в їх безпомилковості немає сумніву.

Отже,

$$\frac{\delta_{\text{ан.сер.(2)}}}{\delta_{\text{ан.(8)}}} = \frac{C_0 L \cdot \gamma_{\text{ан.ек.сер}}}{0.05 \sigma_{\max} L^{1/2} h_e^{-1/2}} = \frac{C_0 \gamma_{\text{ан.ек.сер}}}{0.05 \cdot 2 \underbrace{C_0 L \cdot \gamma_{\text{ан.ек.сер}}}_{\sigma_{\max}} L^{1/2} h_e^{-1/2}}.$$

Або

$$\frac{\delta_{\text{ан.сер.(2)}}}{\delta_{\text{ан.(8)}}} = 10 \frac{h_e^{1/2}}{L^{1/2}}. \quad (19)$$

Також операція з формулами (2) та (18) дає

$$\frac{\delta_{\text{ан.сер.(2)}}}{\delta_{\text{ан.сер.(18)}}} = \frac{C_0 L \gamma_{\text{ан.ек.сер}}}{0.5 \cdot 2 \cdot C_0 L \gamma_{\text{ан.ек.сер}}} = 1.$$

На цьому можна було б закінчити дослідження формулі (8). Можливо тільки ще слід експериментально перевірити, чи дійсно для отримання правильного значення поправки $\delta_{\text{ан.сер.}}$ необхідно поправку, отриману за формулою (8), помножити на коефіцієнт $K_0 = 10 \frac{h_e^{1/2}}{L^{1/2}}$. Такі експерименти були виконані і повністю підтвердили наведені вище теоретичні положення. Як приклад наведено табл. 1, в якій обчислені поправки за формулами (2) та (8) для різних довжин траси L_i , і виявилось, що, дійсно, точні поправки можна отримати, якщо значення поправок, визначені за формулою (8), помножити на K_0 . Для наочності, дані табл. 1 показані на рисунку. З рисунка видно, що точна формула (2) описує майже лінійну зміну рефракції з довжиною траси L ; помилкова формула (8) описує гіперболу. Проте, становить теоретичний інтерес розкриття помилок, що вкрадлися при виведенні формулі (8).

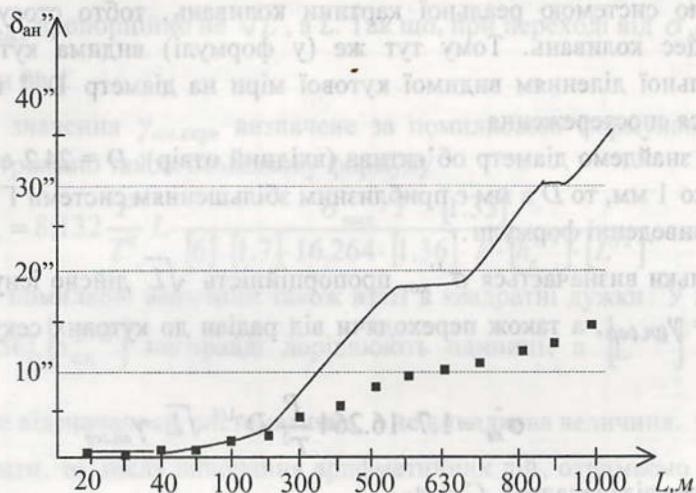
Таблиця 1

Порівняння поправок за аномальну рефракцію, обчислені
на основі формул (2) та (8) при різних довжинах траси – L_i . ($h_e = 1,7 \text{ м}$)

$L_i, \text{м}$	$\delta''_{\text{ан.(2)}}$	σ''_{\max}	$\delta''_{\text{ан.(8)}}$	$V = \delta''_{(8)} - \delta''_{\text{ан.(2)}}$	$\delta''_{(2)} / \delta''_{(8)}$	$K_0 = 10 \cdot h_e^{1/2} / L^{1/2}$
1	2	3	4	5	6	7
20	0.32	0.64	0.11	-0.21	2.91	2.92
30	0.48	0.96	0.20	-0.28	2.40	2.38
40	0.64	1.28	0.31	-0.33	2.06	2.06
50	0.80	1.60	0.43	-0.37	1.86	1.84
100	1.61	3.22	1.23	-0.38	1.31	1.30
200	3.22	6.44	3.48	+0.26	0.92	0.92
300	4.83	9.66	6.25	+1.42	0.77	0.75
400	6.44	12.88	9.87	+3.43	0.65	0.65
500	8.05	16.10	13.79	+5.74	0.58	0.58
600	9.66	19.32	18.12	+8.46	0.53	0.53

Продовження табл. 1

1	2	3	4	5	6	7
630	10.15	20.30	19.52	+9.37	0.52	0.52
700	11.27	22.54	22.84	+11.57	0.49	0.49
800	12.88	27.76	30.07	+17.19	0.43	0.46
900	14.49	28.98	33.30	+18.81	0.44	0.43
1000	16.10	32.20	39.00	+22.90	0.41	0.41



Графік зміни поправок за аномальну рефракцію при зміні довжини траси L_i . Поправки обчислені за формулами: (2) – □ (8) – —.

Для розкриття цих помилок необхідно детально проаналізувати виведення формул (8). Проведена операція ділення формул полегшує пошуки помилок. До того ж одразу видно, що тільки при $h_e = 1$ м та $L = 100$ м, $\delta_{an,ser} = \delta_{an,(8)}$. Якщо ж h_e – постійне і дорівнює 1 м, а $L < 100$ м, то $\delta_{an,(8)} < \delta_{an,ser}$; при $L > 100$ м $\delta_{an,(8)} > \delta_{an,ser}$.

Розглянемо виведення. Суть його – проста. Використовується строга формула (2), а потім значення $\gamma_{an,ek,ser}$, що входить у формулу (2), визначається з іншої формули, в якій $\gamma_{an,ek,ser}$ є функцією коливань зображень σ .

Найочевиднішими з таких формул є формулі (16) або (17). Однак автором формул (8) використовується інша залежність, а саме формула В.І.Татарського. Формула має такий початковий вигляд [15]:

$$\sigma_{ke} = 1.7 C_n L^{1/2} D^{-1/6}. \quad (20)$$

Тут σ_{ke} – середнє квадратичне значення коливань зображень у радіанах; C_n – структурна характеристика показника заломлення повітря; D – діаметр об'єктива; L – довжина траси. Вибір цієї формулі не можна призвести відмінним, оскільки вона виведена для однорідного поля рефракції. Автор формул (8) вважає, що $C_T = \gamma_{an,ser}$. Насправді σ_{ke} є повний кут рефракції, а при вимірюванні визначають відхилення цілі від середнього положення, а таким максимальним відхиленням відповідає $\gamma_{an,min} = 0$, або $\gamma_{an,max}$, а не $\gamma_{an,ser}$. Крім того формула (20) описує не середні рефракції $\delta_{an,ser}$, що впливають на геодезичні вимірювання, а середні квадратичні – σ_{ke} , а $\sigma_{ke} \neq \delta_{an,ser}$. Надалі

використовується відоме співвідношення між структурною характеристикою показника заломлення C_n і структурною характеристикою температури – $C_T = \gamma_{an,max}$ – формула (21)

$$C_n = 78.85 \cdot 10^{-6} \frac{P}{T^2} C_T \quad (21)$$

Числовий коефіцієнт 1,7 – відносне збільшення оптичної системи, яка використовувалась експериментаторами при вивчені флюктуацій лазерної плями

$$\Gamma_{\text{бл}} = D^{1/6} = 1,7 \quad (22)$$

Цей коефіцієнт не стосується переломлюючих властивостей атмосфери, а тільки характеризує збільшення оптичною системою реальної картини коливань, тобто стосується засобів, якими спостерігається процес коливань. Тому тут же (у формулі) видима кутова міра флюктуацій зменшується до реальної діленням видимої кутової міри на діаметр $D^{-1/6}$ тієї оптичної системи (труби), якою ведуться спостереження.

На основі (22) знайдемо діаметр об'єктива (вхідний отвір): $D = 24.2$ см. Оскільки вихідний отвір системи близько 1 мм, то D в мм є приблизним збільшенням системи $\Gamma^x = 242^x$. Але цього не було враховано при виведенні формули.

Поки що, оскільки визначається $\sigma''_{\text{кв}}$, пропорційність \sqrt{L} дійсно існує. Враховуючи (21) і прийнявши, що $C_T = \gamma_{an,sep}$, а також переходячи від радіан до кутових секунд, автор виведення отримав

$$\sigma''_{\text{кв}} = 1.7 \cdot 16.264 \frac{P}{T^2} D^{-1/6} \sqrt{L} \cdot \gamma_{an,sep} \quad (23)$$

Насправді, як вже відзначалось, $C_T = \gamma_{an,max}$.

З формули (23) зрозуміло, що коливання $\sigma''_{\text{кв}}$ викликані флюктуаціями градієнтів, які є на висоті проходження променя. Проте, автор формули (8) неоправдано заходить $\gamma_{an,sep}$ за формулою А.М.Обухова. Ця формула, при нестійкій стратифікації атмосфери має вигляд

$$\gamma_{an} = 1.36 \cdot h^{-2/3} \cdot \gamma_{an,e} \quad (24)$$

Формула А.М.Обухова дійсно дозволяє знайти точкові значення градієнта (середнього чи максимального) на висоті h , якщо виміряні відповідні градієнти на висоті, наприклад, $h_1 = 1$ м. Так слід було б діяти у випадку обчислення градієнтів на деякій висоті h_{ek} , якщо вони виміряні на висоті $h_1 = 1$ м. Проте, в даному випадку формула використана для однієї і тієї ж висоти h_e , що не має змісту і є помилкою. До того ж, при цьому $\gamma_{an,max}$ замінено на $\gamma_{an,sep}$.

Тільки після перерахованих перетворень формула (23) розв'язується відносно $\gamma_{an,sep}$. У результаті отримано

$$\gamma_{an,sep} = \frac{\sigma''_{\text{кв}} T^2 [D^{1/6}]}{[1.7] \cdot 16.264 \cdot [1.36] \cdot P [h^{2/3}] \cdot L^{1/2}} \quad (25)$$

Помилкові величини формули (25) взяті у квадратні дужки. Щоб перейти від (25) до справедливої формули, кожну з цих величин необхідно прирівняти до одиниці.

Так у формулу, що виводиться, помилково включається $h^{-2/3}$ і числові величини 1.36. Надалі у виведенні прийнято, що діаметри D всіх об'єктивів труб, якими користуються геодезисти, дорівнюють 6 см. Тому їх відносне збільшення $D^{1/6} = 1.35$. Таке спрощення майже компенсувало помилкову величину 1.36.

Крім того, надалі при виведенні (8), прийнято $\sigma''_{max} = 6\sigma''_{\text{кв}}$

$$\sigma''_{\text{кв}} \neq \frac{\sigma''_{max}}{6} \quad (26)$$

Дійсно, в теорії імовірності доводиться, що граничні помилки дорівнюють трьом квадратичним помилкам, інколи приймають граничні помилки, які дорівнюють шести квадратичним. Але такі залежності існують між помилками вимірювань, а не між аргументами, що вимірюються. Аргумент σ_{max}'' не визначається тільки через σ_{ke}'' . Прийнявши $\sigma_{max}'' = 6\sigma_{ke}''$, автор виведення, на жаль, робить найбільшу помилку. Не важко зрозуміти, що $\sigma_{max}'' = f(L^{1/2}, \sigma_{ke}'')$. При цьому не враховано ще й те, що при нестійкій атмосфері аномальні градієнти не змінюють знак, а флуктують в границях від $\gamma_{an,min} = 0$ до $\gamma_{an,max}$. Це означає, що σ_{max}'' також не міняє знак і не є випадковою величиною. Тому σ_{max} пропорційно не \sqrt{L} , а L . Так що, при переході від σ_{ke}'' до σ_{max}'' у формулі (25) \sqrt{L} слід замінити на L .

При виведенні значення $\gamma_{an,sep}$, визначене за помилковою формулою (25), підставлене в точну формулу (2) і отримано також помилкову формулу

$$\delta_{an,sep} = 8.132 \frac{P}{T^2} L \cdot \frac{\sigma_{max} \cdot T^2 \cdot [1.35]}{[6] \cdot [1.7] \cdot 16.264 \cdot [1.36] \cdot P \cdot [h_e^{2/3}] \cdot [L^{1/2}]} \quad (27)$$

У формулі (27) помилкові величини також взяті в квадратні дужки. У цій формулі значення [6], [1.7], [1.35], [1.36], $[h_e^{2/3}]$ насправді дорівнюють одиниці, а $[L^{1/2}]$ слід замінити на L ,

оскільки σ_{max} , як вже відзначалось, систематична, а не випадкова величина. Однак, якщо виявлені помилки не враховувати, то, після виконання арифметичних дій, отримаємо те, що отримав автор формулі (8)

$$\delta_{an,sep} = 0.0487 \cdot \sigma_{max} \frac{L^{1/2}}{h_e^{2/3}} \quad (28)$$

Після усунення помилок отримаємо формулу (18)

$$\delta_{an,sep}'' = \frac{\sigma_{max}''}{2} \quad (18)$$

Отже, беззаперечно, формула (28), як і формула (8) – помилкові.

Не важко зрозуміти, чому у “виведений” формулі (28) $h_e^{2/3}$ замінено у формулі (8) на $h_e^{1/2}$.

Як вже відзначалось, значення рефракції, отримані за формулою (8), при лініях $L < 100$ м завжди значно менше правильного значення, отриманого за точною формулою (2). Ці значення рефракції будуть ще менші за формулою (28), оскільки $h^{2/3} > h^{1/2}$, а h_e – в знаменнику цих формул. Між тим, така заміна протирічить формулі Обухова. Це питання ще буде розглянуто.

Розкриття помилковості формули (8) за експериментальними даними

Надалі скористаємося тільки даними, які автор формули (8) наводить для доказу справедливості цієї формули. Такі дані наведені в [2], зведені в три таблиці. Ми подамо ці дані також в таблицях без змін і виконаємо їх детальний аналіз.

У табл. 2, рядки 1, 2, 3 взяті з табл. 1 роботи [2]. На їх основі робиться спроба показати, що максимальні розмахи коливань σ_{max} , а значить рефракції $\delta_{an,sep}$, пропорційні \sqrt{L} а не L . Це виміряні $\sigma_{max,i}$ в рівнинній місцевості, при постійній висоті променя 1,7 м, а довжина лінії змінювалась від 20 м до 630 м. З таблиці видно, що σ_{max} пропорційні $L^{1/2}$, а не L . Так, якщо припустити, що σ_{max} пропорційне $L^{1/2}$, то при $L = 630$ м обчислене значення $\sigma_{max} = 19,1''$, а вимірюне 20,3''

(різниця тільки 1,2"). Якщо ж припустити, що σ_{max} пропорційне L , тоді відповідно, обчислене значення $\sigma_{max} = 107,1"$, а виміряне – 20,3" (різниця у 5,3 раза!). Здавалося б, доказ пропорційності $\sigma_{max} \propto \sqrt{L}$ беззаперечний. Насправді це не так, оскільки поставлений експеримент некоректний. Для визначення залежності σ_{max} тільки від L необхідно виключити вплив інших факторів.

Таблиця 2

Перевірка пропорційності максимальних коливань зображень $\sigma_{max,i}$ та довжини траси L_i

№ рядків	Аргументи	Довжина траси L_i , м						
		20	30	40	50	100	200	630
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Неоднорідне рефракційне поле								
1	$\sigma''_{max,vim}$	3,4	4,2	5,0	5,4	8,0	11,3	20,3
2	$\sigma''_i = 3,4 \cdot \sqrt{\frac{L_i}{20}}$	3,4	4,2	4,8	5,4	7,6	10,8	19,1
3	$\sigma_i = 3,4 \cdot \frac{L_i}{20}$	3,4	5,1	6,8	8,5	17,0	34,0	107,1
4	$\gamma_{an,sep}$	0,87928	0,72412	0,64653	0,55860	0,41378	0,29223	0,16669
Однорідне поле $\gamma_{an,ek,sep} = 0,32366$ град/м								
5	$\sigma''_{max,i}$	1,21	1,88	2,50	3,13	6,26	12,52	39,42
6	$\sigma''_i = 1,25 \cdot \sqrt{\frac{L_i}{20}}$	1,21	1,53	1,76	1,97	2,80	3,95	7,02
7	$\sigma''_i = 1,25 \cdot \frac{L_i}{20}$	1,21	1,88	2,50	3,12	6,25	12,50	39,38

Для цього необхідно виконувати виміри в однорідному рефракційному полі. Передусім промінь світла має проходити на одній висоті. Ця умова, як стверджує автор (8) – виконана. Подруге, а це не менш важливо, промінь має проходити над однорідною підстелюючою поверхнею. Врешті-решт, по-третє; виміри мають бути виконані на різних довжинах ліній в один фізичний момент, або бути приведеними до одного моменту. Про виконання двох останніх вимог у роботах [1, 2], на жаль, немає мови.

Насправді, рефракційне поле було неоднорідним. Щоб впевнитись в цьому достатньо за максимальними розмахами $\sigma_{max,i}$ знайти середні вертикальні градієнти температури для різних довжин ліній.

У табл. 2 такі градієнти обчислені на основі формули (16) і наведені в рядку 4. Як бачимо: при $L = 630$ м градієнт $\gamma_{cep} = 0,16666$, а при $L = 20$ м, $\gamma_{cep} = 0,87928$, градієнти змінилися у 5,3 раза! (Зрозуміло, як раніше було отримано значення 5,3 раза). Звичайно, градієнти можуть дещо відрізнятися через помилки вимірювань σ_{max} , але такі значні зміни – це абсурд! На однаковій висоті над однорідною горизонтальною поверхнею, в один фізичний момент немає причин бути середнім градієнтом різними! Це доведено в метеорології як експериментально, так і теоретично і не заперечується навіть автором формули (8). Приведемо дане рефракційне поле до однорідного. Для цього достатньо задатися аномальним градієнтом, який найчастіше трапляється при значних коли-

ваннях зображені. Однак, щоб не задаватися довільним градієнтом, знайдемо аномальний еквівалентний градієнт за градієнтами, наведеними в рядку 4. Для цього проведено їх чисельне інтегрування відповідно до формули (3). У результаті отримано $\gamma_{\text{ан.ек.сер}} = 0,32366$ град/м. З цим значенням знайдені $\sigma_{\max,i}$ для однорідного поля. Результати записані в рядку 5 табл. 2. У рядках 6 та 7 перевіряється пропорційність \sqrt{L} та L_i . Як бачимо, насправді маємо строгу пропорційність L , а не \sqrt{L} .

У табл. 3, рядки 1, 2 взяті з табл. 2, роботи [2]. Це вимірюні значення лінійних σ_{\max} і кутових – σ''_{\max} рефракцій при довжинах ліній 8, 16, 32, 40, 45, 50 м. Для того, щоб добитися пропорційності вимірюніх $\sigma_{\max,i} \sqrt{L}_i$ автору формули (8) прийшлося необґрунтовано вводити коефіцієнт “зменшення” – k . Насправді, це не коефіцієнт “зменшення”, а коефіцієнт “збільшення” (рядок 3, табл. 3).

Таблиця 3

Вимірюні і споторені значення аномальних рефракцій (лінійних і кутових)

№ рядка	Параметри	Довжина траси L , м					
		8	16	32	40	45	50
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sigma_{\max, \text{мм}}$	0,09	0,40	1,53	2,03	2,38	2,72
2	σ''_{\max}	2,32	5,16	9,86	10,47	10,91	11,22
3	Коефіцієнт “зменшення” – k	2,45	1,50	1,25	1,20	1,18	1,16
4	$\sigma'' \cdot k$	5,3	7,7	12,2	12,4	12,8	13,2
5	$\sigma''_{\max,i} = 2,32 \cdot \frac{L}{8}$	2,32	4,64	9,28	11,60	13,05	14,5
6	$\sigma''_{\max,i} = 2,32 \cdot \sqrt{\frac{L}{8}}$	2,32	3,28	4,64	4,77	5,50	5,80

Введення такого коефіцієнта “обґрунтовується” тим, що труба нівеліра не фокусується при $L = 4$ м. Але, найкоротша віддала – 8 м і труби нівелірів відмінно фокусуються на таку віддалу та дають чітке зображення поділок рейки.

Звичайно, при збільшенні труби нівеліра $\Gamma^x = 45^x$ критичний кут зору буде дорівнювати 1,33°, а при 20 м та 50 м це відповідно становить, в лінійній мірі 0,15 мм – 0,32 мм. Такі лінійні розмахи коливань майже не видимі в дану трубу. Потрібно, за бажанням отримати точніші результати, брати труби з більшим збільшенням, а не вводити надумані коефіцієнти, які, по суті є навмисним споторенням результатів спостережень. Ці споторені значення наведено в рядку 4 табл. 3.

Ми опрацювали ці дані без необґрунтованих споторень. Як видно з обчислень, наведених в рядках 5 та 6 табл. 3, виконується пропорційність σ_{\max} довжині траси L , а пропорційність \sqrt{L} – не існує.

Для детальнішого аналізу і порівняння формул (8) та (18) проведена подальша обробка вихідних даних, якими є рядки 1, 2 табл. 3. Результати обробки наведені в табл. 4. При цьому для ліній $L = 200$ м, 500 м, 1000 м було прийнято середнє значення градієнта з усіх обчислених для ліній 8-50 м. Усі значення градієнтів наведені в колонці 8. Для ліній 200 – 1000 м розмахи σ_{\max} обчислені.

Перевірялось також співвідношення $\delta_{\text{ан.(2)}} = \delta_{\text{ан.(3)}} \cdot 10 \frac{\sqrt{h_e}}{\sqrt{L}}$. Воно (це співвідношення) виявилося точ-

ним. Дані, наведені в інших колонках, зрозумілі без коментарів. Результати виявились прогнозуваними: для коротких ліній формула (8) дає занижені, а для ліній довших 100 м – грубо завищені поправки.

Таблиця 4

Результати порівняння точності роботи формул (18) та (8)

Довжини L_M $\frac{1}{L^{1/2} M^2}$	Вимірювані розмахи $\sigma''_{max,i}$	$\delta''_{anh,i(18)} = \frac{1}{2} \sigma''_{max,i}$	$\Delta''_{anh(i)}$	Різниці $\Delta''\delta =$ $\delta''_{(8)} - \delta''_{(18)}$	$10 \frac{\sqrt{h}}{L}$	$\delta''_{anh(18)} =$ $\delta''_{(8)} \bullet 10 \frac{\sqrt{h}}{L}$	Градієнти γ_{an} (град/м)	$\delta''_{(2)}$ (точні рефракції)	Помилки $v''_{(18)}$ $v''_{(8)}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
50/7,07	11,22	5,61	3,15	-2,46	1,78	5,61	1,1615	6,85	-1,24	-3,70
45/6,71	10,91	5,30	2,90	-2,40	1,88	5,45	1,2184	6,16	-0,86	-3,26
40/6,32	10,47	5,24	2,62	-2,60	2,00	5,24	1,3540	5,48	-0,24	-2,86
32/5,66	9,86	4,93	2,21	-2,72	2,23	4,93	1,5955	4,38	+0,55	-2,17
16/4,00	5,16	2,58	0,82	-1,76	3,15	2,58	1,6645	2,19	+0,39	-1,37
8/2,83	2,32	1,16	0,26	-0,90	4,45	1,16	1,506	1,10	+0,06	-0,84
200/14,4	54,76	27,39	30,74	+3,35	0,89	27,36	1,4167	27,39	0,00	+3,35
500/22,36	136,95	68,48	121,52	+53,04	0,56	68,05	1,4167	68,48	0,00	+53,04
1000/31,62	273,90	136,95	344,00	+207,05	0,40	137,6	1,4167	136,95	0,00	+207,05
									$\Gamma_{anh, cp} = 1,4167$	

Вихідні дані табл. 5 (1-й рядок) взяті з табл. 3, роботи [2]. З цієї таблиці видно, що, дійсно, зі збільшенням висоти променя, зменшуються коливання зображень візорних цілей, і ні до чого тут формула Обухова, яка помилково використовувалась при виведенні формулі (8).

Формула Обухова знадобилася би тоді, якби ми знали розмахи коливань зображень (градієнти температури) на одній висоті, а хотіли би знайти їх на іншій висоті. Між тим наведені дані дають можливість знайти залежність σ_{max} від еквівалентної висоти. Така можливість використана (див. рядки 2–7 табл. 5).

Таблиця 5

Залежність коливань зображень σ_{max} від еквівалентної висоти (h_e , м)

№ рядків	Параметри	Еквівалентні висоти h_e ($L = 50$ м)						
		1,26	1,65	1,96	2,24	2,50	2,76	3,01
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\sigma_{max, \text{вим}}$	3,75	3,35	3,10	2,85	2,65	2,45	2,30
2	$h_e^{2/3}$	1,17	1,40	1,57	1,71	1,84	1,97	2,08
3	$h_e^{1/2}$	1,12	1,28	1,40	1,50	1,58	1,66	1,73
4	$\sigma_{обу}'' = 2,30 \cdot \frac{3,01^{2/3}}{h_e^{2/3}}$	4,09	3,42	3,05	2,80	2,60	2,43	2,30
5	$\sigma_{обу}'' = 2,30 \cdot \frac{3,01^{1/2}}{h_e^{1/2}}$	3,55	3,11	2,84	2,65	2,52	2,40	2,30
6	$\Delta = \sigma_{обу}^{2/3} - \sigma_{max \text{ вим}}$	+0,34	+0,07	-0,05	-0,05	-0,05	-0,02	0,00
7	$\Delta = \sigma_{обу}^{1/2} - \sigma_{max \text{ вим}}$	-0,20	-0,24	-0,26	-0,20	-0,13	-0,05	0,00

$$m_{(1/2)} = 0,19''; m_{(2/3)} = 0,15''; m_{(1/2)} = 0,19''; m_{(2/3)} = 0,05'';$$

Виявилось:

- 1) пропорційність σ_{max} висоті $h_e^{2/3}$ виконується краще, ніж пропорційність висоті $h_e^{1/2}$.
- 2) в колонці 3, значення $\sigma = 3,75''$ визначене приблизно (з помилкою $\approx -0,35''$);
- 3) якщо це значення опустити (не враховувати при обчисленнях), тоді пропорційність σ_{max} еквівалентній висоті $h_e^{2/3}$ майже у 4 рази спрощується краще, ніж пропорційність $h_e^{1/2}$;
- 4) формула Обухова працює.

Висновки

1. Формула П.В.Павліва – доведена незалежними методами: на основі законів Ньютона і Архімеда; на основі теорії турбулентності, розробленої Моніним та Обуховим. Справедливість формул – беззаперечна.

2. Автор формул (8) вважає, що на геодезичні вимірювання впливають випадкові, миттєві значення градієнтів температури. Насправді, протягом однієї секунди часу в турбулентній атмосфері відбувається близько двох сотень флюктуацій градієнтів і відповідних коливань зображень. Щоб навести трубу на ціль, що коливається, спостерігачу необхідно щонайменше 1–2 с. Труба наводиться не на миттєві, а на середні положення цілі. Тому геодезичні вимірювання спроворені не миттєвими, а середніми значеннями рефракцій. До того ж, як читає вже знає, при нестійкій

стратифікації аномальні градієнти не змінюють знак. Тому аномальна рефракція при такій стратифікації завжди від'ємна, тобто є систематичною помилкою вимірюваних зенітних кутів. Закони статики та пливучості атмосфери працюють з відносною помилкою $1 \cdot 10^{-3}$ при осередненнях за одну секунду [16]. Неврахування цього та недоліки виведення формули (8) спричинили в автора суттєві помилки.

3. У теперішній час достатньо проаналізувати записи коливань зображені візорної цілі, зроблених приладом зарядного зв'язку (ПЗЗ) протягом хоча би однієї-двох секунд, щоб зрозуміти, що на результати геодезичних вимірювань впливають середні значення рефракції, а не квадратичні, миттєві, або максимальні і усунути сумніви і протиріччя.

1. Джуман Б.М. Теоретичні основи флюктуаційних методів визначення вертикальної рефракції // Вісник геодезії та картографії. – 2001. – №2 (21). – С. 14–17.
2. Джуман Б.М. Флюктуаційний метод визначення вертикальної рефракції // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – Львів, 2001. – С. 43–47.
3. Матвеєв Л.Т. Курс общей метеорологии // Физика атмосферы. – Л., 1984. – 752 с.
4. Moroz O., Ostrovskiy A. Generalized theory of refraction and turbulence proceedings of the "EGS" symposium GIZ. Nice. – France, 2000. – № 6 (52). – S. 217–226.
5. Островский А.Л., Суюнов А.С. Флюктуационный метод учета вертикальной рефракции и некоторые результаты его применения в условиях Центральной Азии / Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт.
6. Ostrovskiy A. Regularities of fluctuations of vertical gradients of temperature and anomalous refraction of the light beam in thermally turbulent atmosphere. Reports on geodesy Politechnica Warszawska. – Poland, 1997. – №2 (25). – 9 с.
7. Островский А.Л., Мороз О.И. Теория и практика флюктуационного метода определения вертикальной рефракции // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – М., 2000. – № 3. – С. 11–29.
8. Островський А.Л., Мороз О.І. Геометрична інтерпретація флюктуаційного методу визначення аномальної вертикальної рефракції // Сучасні досягнення геодезії, геодинаміки та геодезичного виробництва. – Львів, 1999. – С. 11–13.
9. Островський А.Л. Про помилковість однієї формулі вертикальної рефракції // Матеріали наук. техн. симпоз. "Геомоніторинг". – Львів, 1999. – С. 120–121.
10. Мороз О.І., Островська О.А. Основні положення теорії флюктуаційного методу визначення аномальної вертикальної рефракції // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва". – Львів, 2002. – С. 110–120.
11. Самохвалов И.В. Оптическое зондирование атмосферной турбулентности. – Новосибирск: Изд-во «Наука», 1986. – 90 с.
12. Стробен Д. Распространение лазерного луча в атмосфере: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 414 с.
13. Тартачинський Р.М. До теорії рефракції // Сучасні досягнення геодезії, геодинаміки та геодезичного виробництва. – Львів, 1999. – С. 17–21.
14. Тартачинський Р.М., Хом'як В.С. Сучасний підхід до визначення рефракції // Сучасні досягнення геодезії, геодинаміки та геодезичного виробництва. – Львів, 1999. С. 25–28.
15. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1967. – 548 с.
16. Юношев Л.С. Астрономо-геодезические измерения сквозь трехмерно-неоднородную атмосферу // Геодезия и картография. – 1991. – № 8. – С. 5–9.