УДК 528.33

К. Р. ТРЕТЯК, С. Н. ХОДОРОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ В МНОГОРАЗРЯДНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

Системы геодезических пунктов геометрически представляют собой многоступенчатые построения, различные по точности и методам создания. В [2] отмечается, что до сих пор не разработана строгая теория проектирования таких построений. Сложность проектирования многоразрядных геодезических сетей состоит в том, что необходимо при большом объеме измерений обеспечить необходимую точность в слабом месте последней стадии развития сети и минимум затрат на измерения в ней. Таким образом, задача настоящей статьи — определение средних квадратических ошибок измерений в многоразрядной геодезической сети, которые обращают в минимум целевую функцию суммарной стоимости измерений во всех разрядах сети при заданном ограничении — точности выявления наиболее слабого элемента в последней ступени многоклассной геодезической конструкции.

Целевая функция в поставленной задаче должна представлять аналитическое выражение, устанавливающее взаимосвязь между стоимостью и точностью проектируемых измерений. Из табл. 1, составленной по данным государственных инструкций [4, 5, 6] и нормативных [3] документов для триангуляции и трилатерации, видно, что стоимость C обратно пропорциональна точности произведенных измерений. Здесь под стоимостью C условно подразумеваем расценки на измерение углов на одном пункте триангуляции или измерение одной линии в трилатерации, рассчитанные в соответствии с [3]. Отметим, что поскольку нормы времени или выработки на трилатерационные работы действующими нормативными документами не устанавливаются, будем расценивать измерение линий по нормативам для полигонометрии.

Используя гиперболическую аппроксимацию применительно к данным табл. 1, нетрудно получить соответствующие регрессионные уравнения для триангуляции и трилатерации:

Таблица 1

Зависимость между точностными и стоимостными параметрами

Точность и стоимость измерений	1 кл.	2 кл.	3 кл.	4 кл.	1 разряд	2 разряд
Триангуляция						
μ_β'',	0,7	1,0	1,5	2,0	5,0	10,0
C, руб.	82,2	49,8	25,0	13,0	3,3	2,5
Трилатерация						
μ_s/S	3×10^{-5}	$2{,}5\times10^{-5}$	$1{,}75\times10^{-5}$	—	—	—
C, руб.	75,44	54,35	29,40	—	—	—

$$C_\beta = 2{,}36 - \frac{11{,}22}{\mu_\beta} + \frac{83{,}57}{\mu_\beta^2} - \frac{25{,}53}{\mu_\beta^3}; \qquad (1)$$

$$C_S = \frac{5{,}02 \cdot 10^{-5}}{\frac{\mu_S}{S}} - \frac{6{,}7 \cdot 10^{-10}}{\left(\frac{\mu_S}{S}\right)^2}, \qquad (2)$$

где μ_β — средняя квадратическая ошибка измерения угла, а $\frac{\mu_S}{S}$ — средняя квадратическая относительная ошибка измерения линии. Полученные уравнения (1) и (2), которые позволяют по заданной точности измерений определить их стоимость, используем в качестве целевых функций.

Запишем далее выражение для нахождения точности наиболее слабого элемента многоразрядного построения

$$m = F\left[\mu_1^2\left(A_1 + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}A_2 + \cdots + \frac{\mu_n^2}{\mu_1^2}A_n\right)\right], \qquad (3)$$

где μ_i — точность измерений в i-разряде построения; A_i — матрица элементов нормальных уравнений соответствующих измерений i-го разряда сети; F — весовая функция, отнесенная к определенному наиболее слабому элементу. Стоимость измерений в многоразрядном построении определяется функцией

$$C = f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k), \qquad (4)$$

которую в зависимости от метода создания сети можно выразить соотношениями (1) или (2). Причем при решении задачи оптимизации многоразрядной сети следует отыскать минимум целевой функции (4) при наложенном ограничении

$$P(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) = F\left[\mu_1^2\left(A_1 + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}A_2 + \cdots + \frac{\mu_n^2}{\mu_1^2}A_n\right)\right] \leqslant m_{\text{зад}}, \tag{5}$$

где $m_{\text{зад}}$ — необходимая точность определения наиболее слабого элемента последней очереди построения сети. Запишем общую целевую функцию, где выражение (5) учитывается с помощью штрафной функции

$$T(\mu_1, \mu_2, \mu_3 \cdots, \mu_h, m_{\text{зад}}) = A(\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n) + \\ + [m_{\text{зад}} - P(\mu_1, \mu_2 \cdots, \mu_n)]\, b \cdot a = \min, \tag{6}$$

причем, если

$$m_{\text{зад}} - P(\mu_1,\ \mu_2, \ldots, \mu_k) \geqslant 0, \text{ то } b = 0; \tag{7}$$

$$m_{\text{зад}} - P(\mu_1,\ \mu_2, \ldots,\ \mu_n) < 0, \text{ то } b = 1. \tag{8}$$

Заметим, что коэффициент a в (6) принимает постоянное значение, а используемые в ней штрафные функции в общем подобны функциям в [7]. Как показали исследования, общие целевые функции имеют унимодальный вид. Нахождение их экстремумов представляет собой задачу нелинейного программирования, для решения которой предлагается градиентный метод первого порядка Флетчера—Ривса [8]. В соответствии с этим методом сначала выбираем начальную точку в пространстве проектирования, координатами которой взяты значения точностей измерений μ_1, μ_2, μ_n в соответствующих разрядах n-ступенчатого геодезического обоснования. Обратим внимание, что пространство проектирования ограничено выражением (5). Затем, придерживаясь исходных принципов работы [8], вычисляем компоненты вектора градиента

$$v_i = \frac{-df/d\mu_i}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} (df/d\mu_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{9}$$

и определяем направление наискорейшего спуска, в котором ведем одномерный поиск по формуле

$$\mu_{j_{\text{нов}}} = \mu_{j_{\text{ст}}} + Sv_i, \tag{10}$$

где S — смещение в направлении вектора градиента. Найдя, таким образом, минимум в этом направлении, определяем далее направления новых единичных векторов. По новому направлению проводим одновременный поиск и после определения минимума проверяем, достигнута ли требуемая степень сходимости. При положительном результате вычисления прекращаем, и найденный вектор $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ будет соответствовать оптимальной точности измерений.

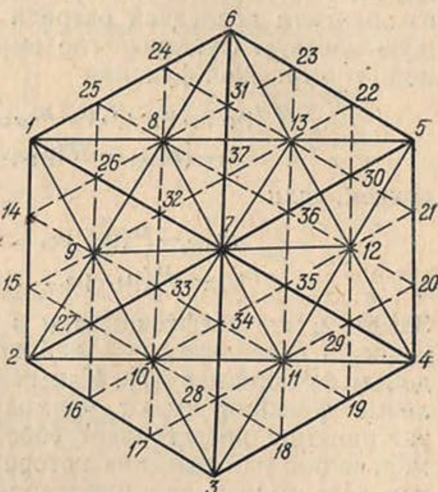
Для реализации вычисления вектора $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ на ЭВМ применяем программу FMCG из пакета прикладных программ ЕС ЭВМ. Вместо определения частных производных находим значение градиента

$$G_i = \frac{T(\mu_i^+) - T(\mu_i^-)}{2\Delta\mu}, \tag{11}$$

Таблица 2

Результаты оптимизации трехразрядной трилатерационной сети (фрагмент)

μ_1, см	μ_2, см	μ_3, см	C, руб	m_p, см
8,7	10,3	3,8	299,44	9,892
10,3	10,3	4,2	288,08	10,204
9,8	9,8	4,2	285,02	10,196
7,8	10,2	4,2	279,90	10,127
6,2	10,0	4,2	275,76	9,900
6,1	10,1	4,4	274,09	10,192
9,8	9,9	4,2	271,07	9,913
10,0	9,9	4,2	270,15	9,986
10,0	10,0	4,2	269,95	10,008



Модель трехразрядной сети трилатерации.

где

$$\mu_i^+ = \mu_i + \Delta\mu; \tag{12}$$

$$\mu_i^- = \mu_i - \Delta\mu, \tag{13}$$

а $\Delta\mu$ — малые конечные приращения проектных параметров.

В заключение отметим, что полученный алгоритм оптимального проектирования можно рекомендовать при предвычислении точностей измерений в сетях, создаваемых в несколько стадий. Оптимизация измерений по приведенным формулам пригодна не только для моделей, а и для различных геометрических схем многоразрядных построений при любом числе их градаций. С помощью приведенного алгоритма можно проводить технико-экономический анализ построения n-разрядного геодезического обоснования и делать соответствующие выводы по обоснованному выбору числа ступеней проектируемой сети.

Практическое исследование алгоритма проинтерпретируем на модели трехразрядного трилатерационного построения (см. рисунок).

Пример. Для сети трилатерации, состоящей из 37 жестко закрепленных пунктов и строящейся в три стадии развития, нужно определить оптимальный проект измерений в соответствующих разрядах построения сети. Сеть включает в себя 12 линий первого разряда (пункты 1—7) при длине S_1 каждой из них 3 км; 24 линии второго разряда (пункты 8—13), $S_2=\sqrt{3}$ км и

90 линий третьего разряда (пункты 14—37), $S_3=1$ км. Расчет точности проектируемых измерений производим при условии, что необходимая точность положения наиболее слабого пункта в последней (третьей) очереди построения сети задана и равна $m_p=10$ см. В табл. 2 представлены результаты оптимального проектирования трехразрядного геодезического построения.

Как показывает анализ результатов табл. 2, при заданной точности положения слабого пункта построения $m_p=10$ см минимальная стоимость измерений 269,95 руб соответствует следующему соотношению точностей измерений в разрядах сети: $\mu_1=10$ см, $\mu_2=10$ см и $\mu_3=4$ см. В соответствии с полученными результатами делаем вывод, что сеть следует проектировать как двухразрядную ($\mu_1=10$ см, $\mu_2=4$ см).

1. *Банов Б.* Алгоритъм за избор на оптимален брои измервания в геодезически мрежи // Геодезия, картография и землеустройство. 1981. Вып. № 9. С. 20—23. 2. *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* К вопросу проектирования геодезических сетей в несколько стадий // Изв. высш. учеб. завед. Геодезия и аэрофотосъемка. 1980. Т. 15. С. 3—7. 3. Единые нормы выработки (времени) на геодезические и топографические работы. М., 1982. 4. Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР. М., 1966. 5. Инструкция по полигонометрии и триангуляции. М., 1976. 6. Инструкция по топографической съемке в масштабах 1 : 5000, 1 : 2000, 1 : 1000. М., 1985. 7. *Третяк К. Р.* Оптимальное проектирование схем измерений в сетях трилатерации // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1985. Вып. 42. С. 109—113. 8. *Fletcher R., Rowell M. J. D.* A Rapidly Convegent Descent Method for Minimization // Computer. J. 1963. № 6. P. 18—19. 9. *Misehke C. R.* An Introduction to Computer—Aided Design, Englewood Cliffs. N. J. Prentice—Hall, 1968.

Статья поступила в редколлегию 30. 12. 87