УДК 528.21

З.Р. ТАРТАЧИНСЬКА
Національний університет "Львівська політехніка"

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ З ДОДАТКОВИМИ УМОВАМИ

В статье приведен вывод основных соотношений метода регуляризации с дополнительными условиями, которые могут использоваться для определения высот геоида и аномалий силы тяжести в региональном масштабе.

Basic relationship of the regularization method with additional conditions were derived for further determination of the geoid heights and gravity anomalies in the regional scale.

Постановка проблеми і її зв'язок з важливими науковими завданнями

Визначення фігури Землі і її зовнішнього гравітаційного поля є основною проблемою геодезії. Сьогодні її вирішенням займається багато науково-дослідних установ в цілому світі, зокрема, Міжнародна служба геоїда. Як відомо, існують методи, які дозволяють розв'язати задачу побудови геоїда і поля аномалій сили ваги в глобальному, регіональному і локальному масштабах. Ці методи відрізняються як теоретичним підходом, так і формою подання результатів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Серед методів, що забезпечують визначення геоїда в вузлах деякої регулярної сітки, можна відзначити метод швидкого перетворення Фур'є, метод середньої квадратичної колокації [1], який вже є класичним, і метод регуляризації [2, 3]. Метод регуляризації був розроблений Тихоновим [3] на початку 60-х років для розв'язання так званих некоректно поставлених задач. Введення в рівняння розв'язку параметра регуляризації α, який можна трактувати як ваговий коефіцієнт [1], дає можливість стабілізувати розв'язок.

Невирішені частини загальної проблеми

Визначення геоїда і поля аномалій сили ваги в окремому регіоні має певні трудноші. Це пов'язано з кількістю вихідних даних і рівномірністю їх розподілу в межах досліджуваного регіону. Введення додаткової інформації, наприклад у вигляді пунктів з відомими абсолютними значеннями сили ваги, не тільки збільшує кількість вихідних, для подальшої обробки, даних, але й робить можливим строге врівноваження мережі так, що майбутня модель поля буде точно представляти гравіметричні виміри в цих пунктах.

Отже, з огляду на особливість побудови геоїда і поля аномалій сили ваги в регіональному та локальному масштабах виникає необхідність модифікувати основні методи, зокрема метод регуляризації.

Постановка задачі

У роботі запропоновано варіант розв'язання варіаційної задачі з додатковими умовами, який дозволяє виконувати обробку вихідних даних безпосередньо методом регуляризації з врахуванням додаткових умов у вигляді абсолютних значень, тобто вимірів, які не спотворені помилками, або помилками яких можна знехтувати відносно помилок основних вихідних даних.

Нехай для деякого регіону існують виміри, що утворюють вектор $\mathbf{l}_1$ розмірністю $(q_1 \times 1)$ і містять випадкові помилки n_1. Тоді рівняння спостережень матиме вигляд

$$l_i = L_i T + n_i, \quad i = 1,2...q_1 \tag{1}$$

або

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{B}_1 T + \mathbf{n}, \tag{2}$$

де вектор $\mathbf{B}_1$ містить лінійні функціонали L_i

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} L_1 \\ .... \\ L_{q_1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

У деякій сукупності точок, наприклад, на границі цього регіону, існують виміри l_j, які утворюють вектор розмірністю $(q_2 \times 1)$ і не спотворені помилками або їх помилками можна знехтувати відносно помилок $\mathbf{n}$. Рівняння спостережень для цих точок матиме вигляд

$$l_j = L_j T, \quad j = 1,2...q_2 \tag{4}$$

або

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{B}_2 T, \tag{5}$$

де

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} L_1 \\ .... \\ L_{q_2} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Систему (5) будемо трактувати як систему додаткових умов, що накладаються на збурюючий потенціал T. Отже, будемо шукати функцію T з розв'язку варіаційної задачі, враховуючи загальну систему рівнянь, яка буде складатись з підсистем (5) і (2). Отже, розв'яжемо цю систему за умови

$$\alpha(T,T) + \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n} = \min, \tag{7}$$

де (T,T) є квадратом норми збурюючого потенціалу в Гільбертовому просторі з відтворюючим ядром [1]. Задачу розв'язуємо за допомогою невизначених множників Лагранжа $\mathbf{k}_i$. Шукаючи мінімум

$$\Phi = \frac{1}{2}\alpha(T,T) + \frac{1}{2}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n} - \mathbf{k}_1{}^T (\mathbf{B}_1 T + \mathbf{n} - \mathbf{l}_1) - \mathbf{k}_2{}^T (\mathbf{B}_2 T - \mathbf{l}_2) = \min, \tag{8}$$

обчислюємо диференціал

$$d\Phi = \alpha(T, dT) + \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} d\mathbf{n} - \mathbf{k}_1{}^T (\mathbf{B}_1 dT + d\mathbf{n}) - \mathbf{k}_2{}^T (\mathbf{B}_2 dT). \tag{9}$$

Згідно з роботою [1] запишемо

$$\mathbf{B} dT = (\mathbf{B}K, dT), \tag{10}$$

Перегрупувавши подібні члени і враховуючи (10), знайдемо необхідну і достатню умову екстремуму

$$d\Phi = \left(\alpha T - \mathbf{k}_1^T \mathbf{B}_1 K - \mathbf{k}_2^T \mathbf{B}_2 K\right) dT + \left(\mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} - \mathbf{k}_1^T\right) dn = 0. \tag{11}$$

З формули (11) випливає, що $d\Phi = 0$, коли

$$\alpha T - \mathbf{k}_1^T \mathbf{B}_1 K - \mathbf{k}_2^T \mathbf{B}_2 K = 0 \tag{12}$$

і

$$\mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} - \mathbf{k}_1^T = 0. \tag{13}$$

З рівняння (12) знаходимо потенціал T

$$T = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{k}_1^T \mathbf{B}_1 K + \mathbf{k}_2^T \mathbf{B}_2 K) \tag{14}$$

або

$$T = \frac{1}{\alpha}((\mathbf{B}_1 K)^T \mathbf{k}_1 + (\mathbf{B}_2 K)^T \mathbf{k}_2)\cdot \tag{15}$$

У матричному вигляді рівняння (15) матиме вигляд

$$T = \frac{1}{\alpha}\widetilde{\mathbf{B}}_k^T \widetilde{\mathbf{k}}, \tag{16}$$

де

$$\widetilde{\mathbf{B}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 K \\ \mathbf{B}_2 K \end{bmatrix} \tag{17}$$

і

$$\widetilde{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Тепер запишемо добутки заданих матриць перетворень $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$ на потенціал T в рівнянні (15)

$$\mathbf{B}_1 T = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{B}_1(\mathbf{B}_1 K)^T \mathbf{k}_1 + \mathbf{B}_1(\mathbf{B}_2 K)^T \mathbf{k}_2) \tag{19}$$

і

$$\mathbf{B}_2 T = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{B}_2(\mathbf{B}_1 K)^T \mathbf{k}_1 + \mathbf{B}_2(\mathbf{B}_2 K)^T \mathbf{k}_2)\cdot \tag{20}$$

Якщо об'єднати вектор $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$ у блокову матрицю $\widetilde{\mathbf{B}}$

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

тоді рівняння (19) і (20) з врахуванням (17), (18) і (21) можна записати у матричному вигляді

$$\widetilde{\mathbf{B}} T = \frac{1}{\alpha}\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}_k^T \widetilde{\mathbf{k}}\cdot \tag{22}$$

Введемо позначення

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{B}_1 K)^T = \mathbf{C}_{t_1 t_1}, \tag{23}$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{B}_2 K)^T = \mathbf{C}_{t_1 t_2}, \tag{24}$$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{B}_1 K)^T = \mathbf{C}_{t_2 t_1}, \tag{25}$$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{B}_2 K)^T = \mathbf{C}_{t_2 t_2}. \tag{26}$$

Добуток блокових матриць $\widetilde{\mathbf{B}} \times \widetilde{\mathbf{B}}_k^T$ дасть блокову матрицю $\widetilde{\mathbf{C}}_{tt}$, тобто

$$\widetilde{\mathbf{B}} \times \widetilde{\mathbf{B}}_k^T = \widetilde{\mathbf{C}}_{tt} \tag{27}$$

і

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{tt} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{C}}_{t_1 t_1} & \widetilde{\mathbf{C}}_{t_1 t_2} \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{t_2 t_1} & \widetilde{\mathbf{C}}_{t_2 t_2} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Тепер рівняння (22) з врахуванням (27) матиме вигляд

$$\widetilde{\mathbf{B}} T = \frac{1}{\alpha}\widetilde{\mathbf{C}}_{tt}\widetilde{\mathbf{k}} \tag{29}$$

З рівняння (13) знаходимо $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \mathbf{C}_{nn}\mathbf{k}_1\cdot \tag{30}$$

Запишемо рівняння (2) і (5) з врахуванням (19), (20), (30) і введених позначень (23)–(26)

$$\mathbf{l}_1 = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{C}_{l_1 l_1}\mathbf{k}_1 + \mathbf{C}_{l_1 l_2}\mathbf{k}_2) + \mathbf{C}_{nn}\mathbf{k}_1 \tag{31}$$

і

$$\mathbf{l}_2 = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{C}_{l_2 l_1}\mathbf{k}_1 + \mathbf{C}_{l_2 l_2}\mathbf{k}_2). \tag{32}$$

У матричному вигляді рівняння (31) і (32) запишемо як

$$\alpha\,\tilde{\mathbf{l}} = \left(\mathbf{C}_{ll} + \alpha\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{C}_{nn}\right)\tilde{\mathbf{k}}\,. \tag{33}$$

де

$$\tilde{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix}\mathbf{l}_1\\ \mathbf{l}_2\end{bmatrix} \tag{34}$$

і

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix}\mathbf{I}\\ \mathbf{O}\end{bmatrix}. \tag{35}$$

З рівняння (33) знаходимо $\tilde{\mathbf{k}}$

$$\tilde{\mathbf{k}} = \left(\mathbf{C}_{ll} + \alpha\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{C}_{nn}\right)^{-1}\alpha\tilde{\mathbf{l}} \tag{36}$$

Підставимо значення $\tilde{\mathbf{k}}$ з рівняння (36) у вираз (16). Одержимо

$$T = \tilde{\mathbf{B}}_k^T\left(\mathbf{C}_{ll} + \alpha\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{C}_{nn}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{l}} \tag{37}$$

або

$$T = \tilde{\mathbf{B}}_k^T\tilde{\mathbf{C}}_{ll}^{-1}\tilde{\mathbf{l}}, \tag{38}$$

де

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ll} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}_{l_1 l_1} + \alpha\mathbf{C}_{nn} & \mathbf{C}_{l_1 l_2}\\ \mathbf{C}_{l_2 l_1} & \mathbf{C}_{l_2 l_2}\end{bmatrix} \tag{39}$$

Отже, для обчислення потенціалу T в будь-якій точці деякого регіону за значеннями лінійних функціоналів L_i і L_j, одержаних у результаті вимірювання за умови, що частина вимірів спотворена помилками, а частина не містить помилок вимірювання, застосуємо формулу (38). При α=1 ця формула буде представляти середню квадратичну колокацію без параметрів з додатковими умовами.

Знайдемо тепер вираз для коваріаційної матриці помилок, використовуючи лінійну оцінку вектора $\hat{\mathbf{T}}$

$$\hat{\mathbf{T}} = U\tilde{\mathbf{l}}\,. \tag{40}$$

Тоді вектор помилок $\boldsymbol{\varepsilon}$ визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}, \tag{41}$$

а його коваріацайна матриця

$$\mathbf{C}_{\varepsilon\varepsilon} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T\} = E\left\{\left(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}\right)\left(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}\right)^T\right\}. \tag{42}$$

Використовуючи формули (40) і (41), знайдемо

$$\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left(U\tilde{\mathbf{l}} - \mathbf{T}\right)\left(U\tilde{\mathbf{l}} - \mathbf{T}\right)^T = \mathbf{T}\mathbf{T}^T - U\tilde{\mathbf{l}}\mathbf{T}^T - \mathbf{T}\tilde{\mathbf{l}}^T U^T + U\tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{l}}^T U^T. \tag{43}$$

Осереднення цього виразу дає коваріаційну матрицю помилок

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T\} = E\{\mathbf{T}\mathbf{T}^T\} - UE\{\tilde{\mathbf{l}}\mathbf{T}^T\} - E\{\mathbf{T}\tilde{\mathbf{l}}^T\}U^T + UE\{\tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{l}}^T\}U^T\,. \tag{44}$$

Враховуючи, що

$$E\{\mathbf{T}\mathbf{T}^T\} = K, \tag{45}$$

$$E\{\widetilde{\mathbf{l}}\mathbf{T}^T\} = \widetilde{\mathbf{B}}_k, \tag{46}$$

$$E\{\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{l}}^T\} = \widetilde{\mathbf{B}}_k^T, \tag{47}$$

$$E\{\widetilde{\mathbf{l}}\widetilde{\mathbf{l}}^T\} = \widetilde{\mathbf{C}}_{ll}, \tag{48}$$

формула (42) матиме вигляд

$$\mathbf{C}_{\varepsilon\varepsilon} = K - U\widetilde{\mathbf{B}}_k - \widetilde{\mathbf{B}}_k U^T + U\widetilde{\mathbf{C}}_{ll}U^T \ . \tag{49}$$

Вираз (49) еквівалентний такому:

$$\mathbf{C}_{\varepsilon\varepsilon} = K - \widetilde{\mathbf{B}}_k^T \mathbf{C}_{ll}^{-1}\widetilde{\mathbf{B}}_k + (U - \widetilde{\mathbf{B}}_k^T\widetilde{\mathbf{C}}_{ll}^{-1})\,\widetilde{\mathbf{C}}_{ll}(U - \widetilde{\mathbf{B}}_k^T\widetilde{\mathbf{C}}_{ll}^{-1})^T. \tag{50}$$

Порівнюючи формули (38) і (40), одержимо

$$U = \widetilde{\mathbf{B}}_k^T\widetilde{\mathbf{C}}_{ll}^{-1}. \tag{51}$$

Отже, коваріаційна матриця помилок $\mathbf{E}_{\varepsilon\varepsilon}$ має вигляд

$$\mathbf{E}_{\varepsilon\varepsilon} = \mathbf{C}_{\varepsilon\varepsilon} = K - \widetilde{\mathbf{B}}_k^T\widetilde{\mathbf{C}}_{ll}^{-1}\widetilde{\mathbf{B}}_k\ , \tag{52}$$

де матриця $\mathbf{C}_{ll}$ визначається за формулою (39).

Висновки

Як бачимо, одержані співвідношення є формально еквівалентними до співвідношень класичної схеми середньої квадратичної колокації і дають можливість реалізувати методи регуляризації і колокації (при α=1) з врахуванням додаткових умов у вигляді вимірів, точність яких значно вища за точність основних вихідних даних. Розроблена обчислювальна схема дозволяє використати методи колокації та регуляризації з додатковими умовами для розв'язання задачі побудови геоїда і визначення аномалій сили ваги в локальних замкнених акваторіях.

1. Moritz H. Advanced Physical Geodesy. – Wichmann: Karsruhe, 1980. 2. Нейман Ю.М. Вариационный метод физической геодезии. – М.: Недра, 1979. 3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.