

Б. М. ДЖУМАН

ТЕОРИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ ПРИ НЕЙТРАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ

Разработка теории вертикальной рефракции при нейтральной стратификации имеет целью повышение точности определения частного угла рефракции в турбулентной атмосфере.

Так, для вычисления угла рефракции методом «колебаний изображений» при выполнении измерений с одного пункта на пассивные цели в периоды неустойчивой температурной стратификации, используют формулу [3]

$$r'' = r_n'' + 0,05 \sigma'' L^{1/2} h_3^{1/2}, \quad (1)$$

где r'' — угол рефракции при нейтральной стратификации; σ'' — максимальная двойная амплитуда колебаний изображений (размах); L — длина трассы.

Эквивалентную высоту получают методом численного интегрирования

$$\frac{1}{h_3^{1/2}} = \frac{2}{L^2} \int_0^L h^{-1/2} (L - l) dl.$$

Угол рефракции при нейтральной стратификации соответствует такому состоянию ограниченного слоя атмосферы, когда $\sigma=0$,

т. е. когда колебания изображений отсутствуют. Практически эти периоды в приземном слое воздуха совпадают с началом спокойных изображений вечерней и окончанием утренней видимостей.

Следуя принципу Ферма, запишем выражение для угла вертикальной рефракции на приземных трассах в виде [4]

$$r = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{dn}{dh} \right) (L - l) dl, \quad (2)$$

где $\frac{dn}{dh}$ — градиент показателя преломления.

Выразим градиент показателя преломления через метеорологические элементы, для этого используем известную зависимость:

$$n - 1 = c\rho \quad (3)$$

где n — показатель преломления; ρ — плотность воздуха; c — константа, зависящая от газа и длины волны света.

Дифференцируя выражение (3) по высоте, имеем

$$\frac{dn}{dh} = c \frac{d\rho}{dh} \quad (4)$$

Для определения вертикального градиента плотности используем уравнения состояния для сухого воздуха и водяного пара:

$$P = R_c \rho_c T; \quad e = R_n \rho_n T, \quad (5)$$

где P , e — парциальное давление сухого воздуха и водяного пара; T — абсолютная температура; R_c , R_n — газовые постоянные для сухого воздуха и пара.

Дифференцируя уравнение (5) по высоте, имеем

$$\frac{d\rho_c}{dh} = \frac{\rho_c}{P} \frac{dP}{dh} - \frac{\rho_c}{T} \frac{dT}{dh}, \quad \frac{d\rho_n}{dh} = \frac{\rho_n}{e} \frac{de}{dh} - \frac{\rho_n}{T} \frac{dT}{dh}. \quad (6)$$

Теперь, подставляя (6) в (4), а также учитывая (5) и основное уравнение статики атмосферы $dP = -g\rho dh$, после некоторых преобразований записываем:

$$\begin{aligned} -\frac{dn_c}{dh} &= c_c \frac{P}{T^2 R_c} \left(\gamma_A + \frac{dT}{dh} \right), \\ -\frac{dn_n}{dh} &= c_n \frac{P}{T^2 R_n} \left(-\frac{T}{P} \frac{de}{dh} + \frac{e}{P} \frac{dT}{dh} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где c_c и c_n — постоянные показателя преломления соответственно равные $292 \cdot 10^{-6}$ и $252 \cdot 10^{-6}$ для желтого света; γ_A — градиент автоконвекции, $\gamma_A = \frac{g}{R_c} = 0,0342$.

Подставляя численные значения постоянных c в формулы (7) и принимая во внимание, что $R_n = 1,608 R_c$, после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} -\frac{dn_c}{dh} &= 292 \frac{P \cdot 10^{-6}}{R_c T^2} \left(\gamma_A + \frac{dT}{dh} \right), \\ -\frac{dn_n}{dh} &= 292 \frac{P \cdot 10^{-6}}{R_c T^2} \left(\frac{0,54 e}{P} \frac{dT}{dh} - \frac{0,54 T}{P} \frac{de}{dh} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Покажем, что $\rho_v = \rho_c + \rho_n$. Для этого запишем уравнение состояния влажного воздуха в виде [5]

$$P_v = \rho_v R_c T \left(1 + \frac{0,378 e}{P_v - 0,378 e} \right), \quad (9)$$

где P_v и ρ_v — соответственно давление и плотность влажного воздуха. Заменяя $P_v = P + e$ и приводя выражение в скобках к общему знаменателю, формулу (9) перепишем в таком виде:

$$\rho_v = \frac{P + 0,622 e}{R_c T}. \quad (10)$$

Далее суммируем уравнения (5) и после некоторых преобразований имеем

$$\rho_c + \rho_n = \frac{P + 0,622 e}{R_c T}. \quad (11)$$

Из формул (10) и (11) следует, что $\rho_v = \rho_c + \rho_n$, поэтому, складывая градиенты показателей преломления в (8), получаем градиент влажного ненасыщенного воздуха

$$-\frac{dn_v}{dh} = 292 \frac{P \cdot 10^{-6}}{R_c T^2 \rho_0} \left(\gamma_A + \frac{P + 0,54 e}{P} \frac{dT}{dh} - \frac{0,54 T}{P} \frac{de}{dh} \right). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (2), а также учитывая, что плотность воздуха с высотой уменьшается, после преобразований имеем формулу для частного угла рефракции влажной ненасыщенной атмосферы:

$$r'' = 16,24 \frac{1}{L} \int_0^L \frac{P}{T^2} \left(\gamma_A + \frac{P + 0,54 e}{P} \frac{dT}{dh} - \frac{0,54 T}{P} \frac{de}{dh} \right) (L - l) dl. \quad (13)$$

На основании (13) и принимая во внимание, что $r = kL/2R_3$, записываем формулу для коэффициента вертикальной рефракции в виде

$$k = 501,5 \frac{P}{T^2 L^2} \int_0^L \left(\gamma_A + \frac{P + 0,54 e}{P} \frac{dT}{dh} - \frac{0,54 T}{P} \frac{de}{dh} \right) (L - l) dl. \quad (14)$$

Разделяя в (14) градиент температуры для сухого воздуха на аномальный и равновесный $\frac{dT}{dh} = \gamma + \gamma_n$, а также полагая, что $\gamma = 0$, а $\gamma_n \approx 0,0098$ и пренебрегая членом $\frac{0,54e}{P}$, получаем формулу для коэффициента рефракции при нейтральной стратификации:

$$k_n = 1003 \frac{P}{T^2 L^2} \int_0^L \left(\gamma_a + \gamma_n - 0,54 \frac{T}{P} \frac{de}{dh} \right) (L - l) dl. \quad (15)$$

Из (15) следует, что адиабатический градиент температуры во влажной ненасыщенной атмосфере не является величиной постоянной, а коэффициент рефракции изменяется незначительно с изменением температуры вследствие компенсирующего влияния градиента влажности.

Выведем формулу для определения градиента влажности при нейтральной стратификации. В случае перехода вода \rightarrow водяной пар, уравнение Клаузуса—Клапейрона принимает вид

$$\frac{dE}{dT} = \frac{E}{T^2} \frac{L}{A \cdot R_n}, \quad (16)$$

где E — упругость насыщения водяного пара в мбар; L — удельная скрытая теплота парообразования равная $597,26 - 0,647(T - T_0)$ кал/г; A — эквивалент работы, $AR_n \approx 0,11$ кал/г.

Полагая, что $\frac{dE}{E} = \frac{de}{e}$ в периоды, близкие к состоянию нейтральной температурной стратификации, и подставляя в (16) численные значения, после некоторых преобразований имеем

$$\frac{de}{dT} = (7070 - 6T) \cdot \frac{e}{T^2}. \quad (17)$$

Учитывая (17) и приближенное равенство $\frac{de}{dh} = \frac{de}{dT} \frac{dT}{dh}$, запишем формулу для вертикального градиента влажности:

$$\frac{de}{dh} = (7070 - 6T) (\gamma + \gamma_n) \frac{e}{T^2}. \quad (18)$$

На основании (18) записываем выражение

$$\frac{de}{e} = \frac{7070 - 6T}{T^2} \left(\frac{\gamma_0}{h^B} + \gamma_n \right) dh. \quad (19)$$

Здесь γ_0 — аномальный градиент на высоте 1 м.

Интегрируя (19), получаем в общем виде формулу распределения влажности с высотой

$$e = e_0 \exp \left(\int_1^h \frac{7070 - 6T}{T^2} \left(\frac{\gamma_0}{h^B} + \gamma_n \right) dh \right). \quad (20)$$

Формула (20) отличается от формул других авторов тем, что она отражает распределение влажности с высотой не только в свободной атмосфере, но и в пограничном и приземном слоях воздуха при различных температурных стратификациях. Принимая в (18) $\gamma=0$ записываем формулу для вертикального градиента влажности при нейтральной стратификации

$$\frac{de}{dh} = (7070 - 6T) \frac{e}{T^2} \gamma_n. \quad (21)$$

Значение коэффициентов рефракции

Коэффициенты	T, K				
	270	280	290	300	K _{ср}
e, мбар	3	9	19	30	—
E, мбар	6,1	12,3	23,4	42,4	—
k _{nC}	0,165	0,155	0,145	0,136	0,150
k _{nE}	0,167	0,162	0,157	0,152	0,160
k _{nE}	0,169	0,164	0,159	0,157	0,162
k _{n9}	0,158	0,159	0,157	0,155	0,157

Подставляя (21) в (15) и произведя интегрирование, учитывая при этом что величины T , P и e в данный момент времени постоянны, получаем формулу для коэффициента рефракции при нейтральной стратификации для влажного ненасыщенного воздуха:

$$k_n = 12,24 \frac{P}{T^2} + \frac{1,4 \cdot 10^4 e}{T^3}. \quad (22)$$

Если в (22) положить $e=0$, то получим формулу коэффициента рефракции для сухого воздуха.

Исследуем зависимость равновесного коэффициента рефракции от температуры и влажности, используем для этого материалы экспериментальных наблюдений автора, выполненных в 1963—1964 годах. Методика этих наблюдений изложена в работах [1, 2]. Результаты исследований сведены в таблице 1. Для различных значений температур приведены коэффициенты рефракции для сухого воздуха k_{nC} , для влажного ненасыщенного воздуха k_n и k_{nE} , вычисленные по формуле (22) с использованием соответствующих экспериментальных значений величин e и упругости насыщенных E .

В последней строке таблицы даны средние коэффициенты рефракции, полученные из 150—200 экспериментальных определений для каждого значения температуры. При вычислениях давление принимали равным 1000 мбар.

Из таблицы следует, что равновесный коэффициент рефракции для сухого воздуха при изменении температуры от 0° до 30°,

изменяется на 0,03, что соответствует изменению угла рефракции для трасс длиной 10 км примерно до 5".

Для реальной влажности атмосферы коэффициент рефракции колебается значительно меньше и среднее его значение может вызвать максимальное изменение угла рефракции около 1" при длинах трасс до 10 км.

1. Джуман Б. М. О точности измерения зенитных расстояний в периоды спокойных изображений // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1966. Вып. 4. С. 9—16.
2. Джуман Б. М., Славский Я. Е. Точность измерения зенитных расстояний при корректировке землеустроительных планов // Тр. Львов. с.-х. ин-та. 1974. Т. 51. С. 121—123.
3. Джуман Б. М. Зависимость амплитуды колебаний изображений от высоты визирного луча // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1983. Вып. 38. С. 16—21.
4. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования // Тр. ЦНИИГАиК. 1955. Вып. 102. С. 310.
5. Матвеев А. Т. Физика атмосферы. Л., 1965.

Статья поступила в редакцию 13.02.87