УДК 528.486:625.724

А. В. ГОЖИЙ

ОБЩИЙ ПРИНЦИП ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ДЕТАЛЬНОЙ РАЗБИВКИ КРУГОВОЙ КРИВОЙ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

Обычно точность построения круговой кривой любыми способами характеризуется величиной отклонения * выносимых точек от их действительного положения на оси кривой. При этом наиболее надежную характеристику точности построения кривой можно получить лишь в том случае, если определить не просто отклонения выносимых точек от их действительных положений на расчетной кривой заданного радиуса, а отклонения построенных точек от оси расчетной кривой по нормали к ней. В этом случае определенные отклонения фактически будут являться погрешностями построения радиуса кривой в различных ее точках, на что мы уже обращали внимание в работах [2, 3].

Если, к примеру, вместо действительного положения точки n круговой кривой фактически вынесена в натуру точка n' (рис. 1), то простое отклонение вынесенной точки от ее действительного положения будет δL, а погрешность (отклонение) построения радиуса окажется равной δR. Понятно, что при любом способе детальной разбивки круговой кривой величины конкретных значений обеих этих характеристик точности разбивки

* Для упрощения изложения вопроса мы пока не будем оговаривать, какого именно отклонения — простого или среднего квадратического.

будут зависеть от величин разбивочных элементов способа и их погрешностей.

Для каждого способа разбивки зависимость между δR и соответствующими разбивочными элементами, а также их погрешностями можно установить на основе геометрической сути и рабочих формул способа подобно тому, как это сделано в работе [3] для случая детальной разбивки круговой кривой способом прямоугольных координат. Однако такой принцип не

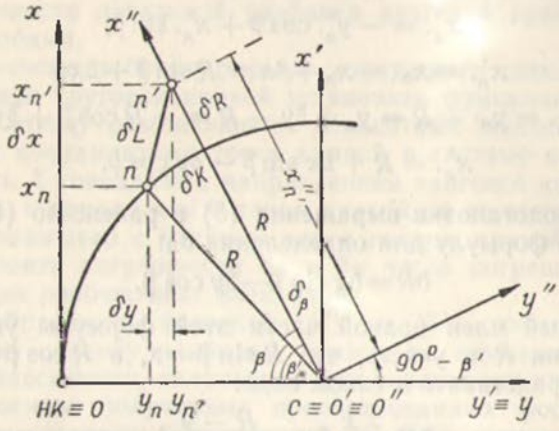

Рис. 1. Схема преобразования прямоугольных координат.

позволяет получить значения δR одинаковым образом для всех способов разбивки. Кроме того, в некоторых случаях определение δ_R этим путем оказывается слишком громоздким. Ниже мы рассмотрим другой принцип определения погрешности построения радиуса круговой кривой, который приемлем для всех способов ее детальной разбивки. Сущность принципа состоит в следующем.

Предположим, что положение точки n кривой определено через координаты x_n и y_n в системе прямоугольных координат XOY, ось X которой совмещена с направлением тангенса кривой, ось Y — с направлением радиуса кривой в ее начале, а начало системы — с началом кривой. Если отложение координат x_n и y_n на местности произведено с погрешностями δ_x и δ_y, то вместо точки n на местность будет вынесена точка n', координаты которой в системе XOY будут $x_{n'}=x_n+\delta_x$, $y_{n'}=$ $=y_n+\delta_y$, а удаление ее от центра кривой C составит $R'=$ $=R+\delta R$.

Чтобы определить δR, преобразуем систему координат XOY сначала в систему $X'O'Y'$ путем плоскопараллельного перемещения XOY на расстояние R вдоль положительного направления оси Y, а затем в систему $X''O''Y''$ путем поворота осей системы $X'O'Y'$ на угол $(90°\beta') \approx (90°\beta)$ против хода часовой стрелки. В результате получим

$$\delta R = x''_{n'} - R. \qquad (1)$$

Пользуясь известными формулами [4] преобразования плоских прямоугольных координат путем поворота и плоско-параллельного переноса осей, представим координату $x''_{n'}$ точки n' в системе $X''O''Y''$ сначала через ее координаты $x'_{n'}$ и $y'_{n'}$ в системе $X'O'Y'$, а затем через координаты $x_{n'}$ и $y_{n'}$ в системе XOY. Последовательно будем иметь:

$$x''_{n'} = -y'_{n'} \cos\beta + x'_{n'} \sin\beta; \qquad (2)$$

$$x'_{n'} = x_{n'} = x_n + \delta x = R \sin\beta + \delta x; \qquad (3)$$

$$y'_{n'} = y_{n'} - R = y_n + \delta y - R = -R\cos\beta + \delta y; \qquad (4)$$

$$x''_{n'} = R + \delta x \sin\beta - \delta y \cos\beta. \qquad (5)$$

После подстановки выражения (5) в равенство (1) получим следующую формулу для определения δ_R:

$$\delta R = \delta x \sin\beta - \delta y \cos\beta. \qquad (6)$$

Если каждый член правой части этой формулы умножить и разделить на R и учесть, что $R\sin\beta = x$, а $R\cos\beta = R - y$, то ее можно представить в таком виде:

$$\delta R = \frac{x}{R}\delta x - \frac{R-y}{R}\delta y. \qquad (7)$$

На основе этой зависимости можно записать такую формулу для вычисления средней квадратической погрешности m_R построения радиуса по известным средним квадратическим погрешностям m_x и m_y отложения координат x и y:

$$m_R^2 = \frac{x^2}{R^2} m_x^2 + \frac{(R-y)^2}{R^2} m_y^2. \qquad (8)$$

Чтобы более полно осветить рассматриваемый вопрос, приведем здесь и формулы для вычисления погрешностей δ_k и m_k, характеризующих степень нарушения равенства интервалов детальной разбивки кривой, но, правда, играющих второстепенную роль при оценке точности построения собственно круговой кривой. Эти формулы получены тем же путем, что и формулы (1)—(8), и имеют следующий вид:

$$\delta_k \approx y''; \qquad (9)$$

$$y'' = y' \sin\beta + x' \cos\beta = \delta x \cos\beta + \delta y \sin\beta; \qquad (10)$$

$$\delta k = \frac{R-y}{R}\delta x + \frac{x}{R}\delta y; \qquad (11)$$

$$m_k^2 = \frac{(R-y)^2}{R^2} m_x^2 + \frac{x^2}{R^2} m_y^2. \qquad (12)$$

Изложенный выше принцип и полученные формулы (8) и (12) без каких-либо оговорок и изменений применимы для оценки точности детальной разбивки круговой кривой способом прямоугольных координат. При более подробном анализе этого принципа можно заметить, что он фактически пригоден и для оценки точности разбивки кривой другими способами, т. е. фактически является общим для всех способов. С учетом этого общего принципа можно сформулировать следующие правила оценки точности детальной разбивки круговой кривой различными способами.

1. На основе рабочих формул конкретного способа детальной разбивки круговой кривой установить функциональную зависимость между разбивочными элементами способа и прямоугольными координатами точек кривой в системе координат, в которой ось X совпадает с направлением тангенса кривой, ось Y направлена с начала или с конца кривой на ее центр, а начало системы совмещено с началом или с концом кривой.

2. Выразить погрешности δx и δy через погрешности соответствующих разбивочных элементов.

3. Преобразовать формулы (7) и (11) применительно к конкретному способу разбивки, приняв во внимание функциональные зависимости, полученные при реализации пунктов 1 и 2.

4. На основе полученных преобразованных формул (7) и (11) для вычисления погрешностей δR и δk записать формулы для вычисления соответствующих средних квадратических погрешностей построения радиуса m_R и равенства интервалов разбивки m_k.

Проиллюстрируем применение сформулированного правила на примере оценки точности детальной разбивки круговой кривой способом полярных координат и способом линейно-угловой засечки.

В способе полярных координат разбивочными элементами являются полярные углы α и полярные расстояния l (рис. 2). Между этими элементами и прямоугольными координатами выносимых точек существует следующая простая взаимосвязь:

$$x_n = l_n \cos \alpha_n; \quad (13) \qquad y_n = l_n \sin \alpha_n. \qquad (14)$$

Функциональную зависимость между погрешностями δx и δy прямоугольных координат и погрешностями $\delta\alpha$ и δl разбивочных элементов α и l легко установить путем дифференцирования формул (13) и (14).

Будем иметь:

$$\delta x_n = \cos \alpha_n \delta l_n - l_n \sin \alpha_n \frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \qquad (15)$$

$$\delta y_n = \sin \alpha_n \delta l_n + l_n \cos \alpha_n \frac{\delta\alpha''}{\rho''}, \qquad (16)$$

где $\rho'' = 206264{,}8''$.

Если учесть эти зависимости в формулах (7) и (11), а также иметь в виду, что $\frac{l}{R} = 2\sin\alpha$, то после несложных преобразований можно получить такие формулы для определения величин δR и δk и соответствующих средних квадратических погрешностей m_R и m_k при выносе в натуру точки n способом полярных координат:

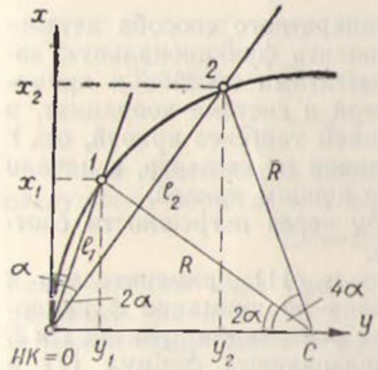

Рис. 2. Схема выноса в натуру точек круговой кривой способом полярных координат.

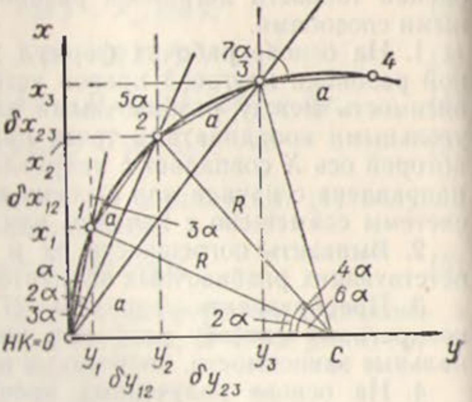

Рис. 3. Схема выноса в натуру точек круговой кривой способом линейно-угловой засечки.

$$\delta R_n = \sin\alpha_n \, \delta l_n - l_n \cos\alpha_n \frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \tag{17}$$

$$\delta k_n = \cos\alpha_n \, \delta l_n + l_n \sin\alpha_n \frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \tag{18}$$

$$(m_R^2)_n = \sin^2\alpha_n \, (m_l^2)_n + l_n^2 \cos^2\alpha_n \frac{m_\alpha''^2}{\rho''^2}; \tag{19}$$

$$(m_k^2)_n = \cos^2\alpha_n \, (m_l^2)_n + l_n^2 \sin^2\alpha_n \frac{m_\alpha''^2}{\rho''^2}. \tag{20}$$

При детальной разбивке круговой кривой способом линейно-угловой засечки * разбивочными элементами являются хорда a и полярные углы α (рис. 3). Поскольку для первой точки эти разбивочные элементы являются ее полярными координатами, то вынос первой точки кривой в натуру фактически производится способом полярных координат, который

* В работе [1] этот способ именуется способом углов и хорд. Однако такое название недостаточно конкретно отражает специфику способа и фактически пригодно и для некоторых других способов, в которых вынос точек в натуру тоже осуществляется отложением углов и хорд.

рассмотрен выше. Вынос остальных точек основан на засечке их с двух известных точек, в качестве которых используются начало (или конец) кривой и предшествующая точка детальной разбивки. При этом с начала (или конца) кривой откладывают полярный угол α, а с предшествующей точки разбивки — хорду a. Например, для определения положения точки 2 нужно отложить отрезок a из точки 1 таким образом, чтобы его конец находился в створе направления, полученного отложением угла 2α от направления тангенса кривой (рис. 3).

В отличие от способов прямоугольных координат и полярных координат, в которых погрешности выноса отдельных точек независимы между собой, в способе линейно-угловой засечки погрешность выноса последующей точки кривой зависит от погрешности выноса предыдущей точки, от которой откладывается хорда a. Поэтому в способе линейно-угловой засечки объем содержания формул для определения погрешностей δx и δy, δR и δk (и соответственно m_R и m_k) будет меняться при переходе от одной точки кривой к другой. Для вычисления δx и δy в первой выносимой точке кривой можно воспользоваться формулами (15) и (16) способа полярных координат. Применительно к рассматриваемому случаю их следует представить в таком виде:

$$\delta x_1 = \cos\alpha\delta a - a\sin\alpha\frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \tag{21}$$

$$\delta x_1 = \cos\alpha\delta a - 2R\sin^2\alpha\frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \tag{21,a}$$

или

$$\delta y_1 = \sin\alpha\delta a + a\cos\alpha\frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \tag{22}$$

$$\delta y_1 = \sin\alpha\delta a + R\sin 2\alpha\frac{\delta\alpha''}{\rho''}, \tag{22,a}$$

поскольку $a = 2R\sin\alpha$.

После подстановки этих формул в соотношения (7) и (11) и некоторых преобразований последних легко получить следующие формулы для вычисления δR_1 и δk_1:

$$\delta R_1 = \sin\alpha\delta a - R\sin 2\alpha\frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \tag{23}$$

$$\delta k_1 = \cos\alpha\delta a + R(1-\cos 2\alpha)\frac{\delta\alpha''}{\rho''}. \tag{24}$$

Далее будем иметь:

$$(m_R^2)_1 = \sin^2\alpha m_a^2 + R^2\sin^2 2\alpha\frac{m_\alpha''^2}{\rho''^2}; \tag{25}$$

$$(m_k^2)_1 = \cos^2 \alpha m_a^2 + R^2 (1 - \cos 2\alpha)^2 \frac{m_\alpha^{\prime\prime 2}}{\rho^{\prime\prime 2}}. \quad (26)$$

Для точки 2 кривой, которая выносится в натуру путем отложения угла 2α в начале кривой (являющимся и началом системы прямоугольных координат) и хорды a в точке 1, будем иметь:

$$\delta x_2 = \delta x_1 + \delta x_{12} + \delta x_{2\alpha}; \quad (27)$$

$$\delta y_2 = \delta y_1 + \delta y_{12} + \delta y_{2\alpha}. \quad (28)$$

В формулах (27) и (28) δx_{12} и δy_{12} — погрешности в прямоугольных координатах точки $2(x_2, y_2)$, вызванные неточностью отложения хорды a из точки *1*, координаты которой x_1 и y_1; $\delta x_{2\alpha}$ и $\delta y_{2\alpha}$ — погрешности в прямоугольных координатах точки *2*, обусловленные неточностью построения угла 2α в начале координат.

Чтобы определить погрешность δx_{12} и δy_{12}, являющихся по сути теми частями погрешностей приращений координат, которые обусловлены неточностью отложения расстояния a, достаточно продифференцировать на переменной a формулы:

$$\Delta x_{12} = x_2 - x_1 = a \cos 3\alpha; \quad (29)$$

$$\Delta y_{12} = y_2 - y_1 = a \sin 3\alpha, \quad (30)$$

по которым принято вычислять приращения координат по известным длине отрезка и его направлению. В нашем случае расстояние между точками *1* и *2* равно a, а дирекционный угол линии *1—2* составляет 3α. В результате дифференцирования получим:

$$\delta x_{12} = \cos 3\alpha \delta a; \quad (31) \qquad \delta y_{12} = \sin 3\alpha \delta a. \quad (32)$$

Подобным образом можно установить вид формул для определения погрешностей $\delta x_{2\alpha}$ и $\delta y_{2\alpha}$ в координатах точки $2(x_2, y_2)$, вызванных погрешностью $\delta 2\alpha$ построения угла 2α в начале координат. Для этого достаточно продифференцировать формулы

$$x_2 = l_2 \cos 2\alpha; \quad (33) \qquad y_2 = l_2 \sin 2\alpha \quad (34)$$

по переменной 2α. Тогда

$$\delta x_{2\alpha} = - l_2 \sin 2\alpha \frac{\delta 2\alpha''}{\rho''}; \quad (35) \qquad \delta y_{2\alpha} = l_2 \cos 2\alpha \frac{\delta 2\alpha''}{\rho''}. \quad (36)$$

Приняв во внимание, что

$$l_2 = 2R \sin 2\alpha, \quad (37)$$

последние формулы можно представить в таком виде:

$$\delta x_{2\alpha} = - 2R \sin^2 2\alpha \frac{\delta 2\alpha''}{\rho''}; \quad (38) \qquad \delta y_{2\alpha} = R \sin 4\alpha \frac{\delta 2\alpha''}{\rho''}. \quad (39)$$

Если теперь учесть зависимости (21), (22), (31), (32), (35) и (36) в формулах (27) и (28), то после несложных преобразований можно получить:

$$\delta x_2 = (\cos\alpha + \cos 3\alpha)\,\delta a - 2R(\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha)\frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \qquad (40)$$

$$\delta y_2 = (\sin\alpha + \sin 3\alpha)\,\delta a + R(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)\frac{\delta\alpha''}{\rho''}. \qquad (41)$$

При преобразовании формул (27) и (28) мы учитывали, что $a=2R\sin\alpha$ и что погрешность построения угла не зависит от его величины, т. е. считали, что $\delta\alpha=\delta 2\alpha=\ldots=\delta n\alpha$.

После подстановки полученных выражений для определения δx_2 и δy_2 в исходные зависимости (7) и (11) и преобразования последних мы придем к таким формулам для определения δR_2 и δk_2:

$$\delta R_2 = (\sin\alpha + \sin 3\alpha)\,\delta a + R(\sin 2\alpha - 2\sin 4\alpha)\frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \qquad (42)$$

$$\delta k_2 = (\cos\alpha + \cos 3\alpha)\,\delta a + R(\cos 2\alpha - 2\cos 4\alpha)\frac{\delta\alpha''}{\rho''}. \qquad (43)$$

Аналогичным образом можно получить следующую совокупность формул для вычисления погрешностей δx_3, δy_3 и δR_3, δk_3:

$$\delta x_3 = \delta x_2 + \delta x_{23} + \delta x_{3\alpha}; \qquad (44)$$

$$\delta y_3 = \delta y_2 + \delta y_{23} + \delta y_{3\alpha}; \qquad (45)$$

$$\Delta x_{23} = x_3 - x_2 = a\cos 5\alpha; \qquad (46)$$

$$\Delta y_{23} = y_3 - y_2 = a\sin 5\alpha; \qquad (47)$$

$$\delta x_{23} = \cos 5\alpha\,\delta a; \qquad (48)$$

$$\delta y_{23} = \sin 5\alpha\,\delta a; \qquad (49)$$

$$x_3 = l_3\cos 3\alpha; \qquad (50)$$

$$y_3 = l_3\sin 3\alpha; \qquad (51)$$

$$\delta x_{3\alpha} = -l_3\sin 3\alpha\frac{\delta 3\alpha''}{\rho''}; \quad (52) \qquad \delta y_{3\alpha} = l_3\cos 3\alpha\frac{\delta 3\alpha''}{\rho''}; \qquad (53)$$

$$l_3 = 2R\sin 3\alpha; \qquad (54)$$

$$\delta x_{3\alpha} = -2R\sin^2 3\alpha\frac{\delta 3\alpha''}{\rho''}; \quad (55) \qquad \delta y_{3\alpha} = R\sin 6\alpha\frac{\delta 3\alpha''}{\rho''}; \qquad (56)$$

$$\delta x_3 = (\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha)\,\delta a - 2R\times$$

$$\times(\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha)\frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \qquad (57)$$

$$\delta y_3 = (\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha)\,\delta a + R \times$$
$$\times (\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha)\,\frac{\delta\alpha''}{\rho''}\,; \qquad (58)$$

$$\delta R_3 = (\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha)\,\delta a + R \times$$
$$\times (\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - 3\sin 6\alpha)\,\frac{\delta\alpha''}{\rho''}\,; \qquad (59)$$

$$\delta k_3 = (\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha)\,\delta a + R \times$$
$$\times (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha - 3\cos 6\alpha)\,\frac{\delta\alpha''}{\rho''}\,. \qquad (60)$$

Сравнивая между собой формулы для вычисления δx, δy, δR и δk в точках *1*, *2*, *3*, легко установить, что при выносе в натуру n-й точки кривой способом линейно-угловой засечки погрешности δx_n, δy_n и δR_n, δk_n должны определяться на основе следующих соотношений:

$$\delta x_n = \sum_{k=1}^{k} \cos(2k-1)\,\alpha\cdot\delta a - 2R\sum_{k=1}^{n} \sin^2 k\alpha\cdot\frac{\delta\alpha''}{\rho''}\,; \qquad (61)$$

$$\delta y_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\,\alpha\cdot\delta a + R\sum_{k=1}^{n} \sin 2k\alpha\cdot\frac{\delta\alpha''}{\rho''}\,; \qquad (62)$$

$$\delta R_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\,\alpha\cdot\delta a + R\,[\sum_{k=1}^{n} \sin 2(k-1)\,\alpha -$$
$$- n\sin 2n\alpha]\,\frac{\delta\alpha''}{\rho''}\,; \qquad (63)$$

$$\delta k_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\,\alpha\cdot\delta a + R\,[\sum_{k=1}^{n} \cos 2(k-1)\,\alpha -$$
$$- n\cos 2n\,\alpha]\,\frac{\delta\alpha''}{\rho''}\,. \qquad (64)$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned}
&n\sin 2n\alpha = A_n; && n\cos 2n\alpha = B_n;\\
&\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\,\alpha = C_n; && \sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\,\alpha = D_n;\\
&\sum_{k=1}^{n} \sin 2(k-1)\,\alpha = E_n; && \sum_{k=1}^{n} \cos 2(k-1)\,\alpha = F_n;\\
&E_n - A_n = M_n; && F_n - B_n = N_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Тогда

$$\delta R_n = C_n \delta a + RM_n \frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \qquad (66)$$

$$\delta k_n = D_n \delta a + RN_n \frac{\delta\alpha''}{\rho''}; \qquad (67)$$

и соответственно

$$(m_R^2)_n = B_n^2 m_a^2 + R^2 M_n^2 \frac{m_\alpha''^2}{\rho''^2}; \qquad (68)$$

$$(m_k^2)_n = D_n^2 m_a^2 + R^2 N_n^2 \frac{m_\alpha''^2}{\rho''^2}. \qquad (69)$$

Однако следует заметить, что вычисление коэффициентов C, D, M и N по формулам (65) — дело трудоемкое. Поэтому для быстрого определения этих величин желательно составить специальные таблицы, пользуясь которыми, по заданным значениям углов α и известному числу n выносимых точек кривой можно было бы выбирать значения C, D, M и N для любой выносимой в натуру точки кривой.

Так же как получены выше формулы для оценки точности детальной разбивки круговой кривой способами полярных координат и линейно-угловой засечки, можно получить соответствующие формулы и для любого другого способа разбивки. По таким формулам можно производить не только оценку точности построения круговой кривой данным способом, зная погрешности разбивочных элементов, но и решать обратную задачу — предвычислять точность отложения на местности отдельных разбивочных элементов при заданной точности построения кривой. На основе таких однородных формул можно осуществлять сравнение различных способов с целью оценки достоинств и недостатков последних.

Список литературы: 1. *Ганьшин В. Н., Хренов Л. С.* Таблицы для разбивки круговых и переходных кривых. — Киев: Будівельник, 1974. 2. *Гожий А. В., Журавель А. А., Туряница И. А.* Результаты практического сравнения различных способов детальной разбивки круговой кривой. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30. 3. *Гожий А. В.* Об оценке точности детальной разбивки круговой кривой способом прямоугольных координат. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 32. 4. *Привалов И. И.* Аналитическая геометрия. — М.: Физматгиз, 1963.

Статья поступила в редколлегию 08. 04. 81
