

В. А. ВИЛЕНСКИЙ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АЗИМУТАЛЬНОГО РЯДА

Изучение характера накопления погрешностей в азимутальных сетях представляет определенный интерес, поскольку в геодезической литературе почти не встречаются исследования этого вопро-

са. Отсутствие публикаций объясняется видимо тем, что построение таких сетей представлялось неэффективным по сравнению с сетями триангуляции, трилатерации, полигонометрии. Действительно, астрономический метод даст высокую точность определения азимута, но является чрезвычайно трудоемким; гироскопический же метод не обеспечивает необходимой точности.

Однако прогресс в конструировании гиротеодолитов позволяет надеяться, что в ближайшем будущем будут созданы приборы

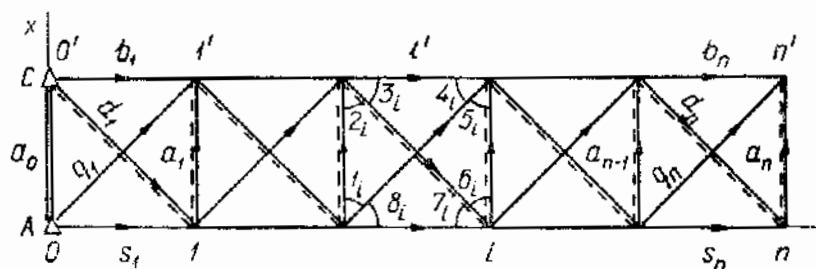


Схема азимутального ряда.

и предложены программы измерения, которые позволят более точно определять азимуты. Уже сейчас есть возможность определения азимута гироскопическим методом с ошибкой $m_\alpha = 2''$ [2].

В этой связи исследование азимутальных сетей представляется актуальным.

1. Выполним оценку точности азимутального ряда из геодезических квадратов (см. рисунок). Нумерация пунктов, углов и сторон приведена на рисунке. Полагается, что в данной цепи определялись азимуты сторон a_i, b_i, s_i, d_i, g_i .

В каждом из геодезических четырехугольников ряда имеется, как не трудно заметить, одно избыточное измерение, которое составляет одно полюсное уравнение. Всего в ряде из n фигур возникает n условных уравнений. Для i -й фигуры это уравнение, выраженное через углы, имеет вид

$$\frac{\sin(4_i) \cdot \sin(6_i + 7_i) \cdot \sin(2_i)}{\sin(2_i + 3_i) \cdot \sin(5_i) \cdot \sin(7_i)} = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Дифференцируя (1) и переходя от поправок в углы к поправкам в азимуты и учитывая, что все углы в геодезическом квадрате равны 45° , найдем условное уравнение полюса

$$\frac{1}{\rho''} [(A)_{i-1} + (A)_i + (B)_i - (C)_i - 2(D)_i - 2(G)_i] + W_i = 0. \quad (2)$$

Здесь $(A), (B), (C), (D), (G)$ — поправки к измеренным значениям азимутов A, B, C, D, G сторон a, b, c, d, g .

Обозначим через r_i — вектор коэффициентов i -го условного уравнения. Системе условных уравнений (2) соответствует систе-

ма нормальных уравнений, коэффициенты которой принимают значения

$$\{r_i, r_j\} = \begin{cases} 12, & \text{при } i - j = 0; \\ 1, & \text{при } |i - j| = 1; \\ 0, & \text{при } |i - j| > 1. \end{cases} \quad (3)$$

Пользуясь алгоритмом Гаусса и пренебрегая нулевыми слагаемыми, найдем

$$[r_i r_i \cdot (i-1)] = [r_i r_i] = \frac{1}{[r_{i-1} r_{i-1} \cdot (i-2)]}, \quad i = \overline{2, n}. \quad (4)$$

Полученные числа являются последовательными подходящими цепной дроби, предел которой можно определить из выражения

$$X_0 = 12 - \frac{1}{X_0}. \quad (5)$$

Откуда

$$X_0 = 11,9161. \quad (6)$$

Выполним теперь оценку точности различных элементов сети. Обратный вес $1/P_F$ и среднюю квадратическую ошибку m_F уравненных элементов определяем по формулам.

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \sum_{i=1}^k \frac{[r_i f \cdot (i-1)]^2}{[r_i r_i \cdot (i-1)]}. \quad (7)$$

$$m_F = \mu \sqrt{1/P_F}. \quad (8)$$

Здесь f — частные производные весовой функции; μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса. В (7) закономерность образования преобразованных коэффициентов нормальных уравнений $[r_i r_i \cdot (i-1)]$ нам уже известна. Поэтому оценка точности функции уравненных элементов F сводится к нахождению $[ff]$ и членов $[r_i f \cdot (i-1)]$.

Поперечный сдвиг. Для определения поперечного сдвига u необходимо найти среднюю квадратическую ошибку абсциссы точки n . Для функции F_u можно написать

$$F_u = x_n - x_0 + \sum_{i=1}^n \Delta x_i = x_0 + \sum_{i=1}^n S_i \cdot \cos(C_i), \quad (9)$$

где C_i — азимуты промежуточных сторон, вычисленные по уравненным направлениям ряда. Вследствие влияния ошибок измеренных направлений Δx_i не будут равны нулю. Дифференцируя (9), запишем выражение для весовой функции поперечного сдвига пункта

$$f_u = dF_u = \sum_{i=1}^n d(\Delta x_i) = \sum_{i=1}^n \left[\cos(C_i) ds - s_i \sin(C_i) \frac{dC}{\rho''} \right]. \quad (10)$$

Учитывая, что $C_i = 90^\circ$ и $\cos(C_i)$ близок к нулю, а $\sin(C_i)$ — близок к единице и длины промежуточных сторон равны между собой $s_1 = s_2 = s_3 = \dots = s$, (10) примет вид

$$f_u = dF_u = - \frac{s}{\rho''} \sum_{i=1}^n (C_i). \quad (11)$$

Очевидно

$$[r_1 f] = [r_2 f] = \dots = [r_n f] = -1 \cdot \frac{s}{\rho''}, \quad (12)$$

$$[ff] = \frac{s^2}{\rho^2} n. \quad (13)$$

Преобразованные неквадратичные коэффициенты весовой функции определим, воспользовавшись алгоритмом Гаусса,

$$\begin{aligned} [r_2 f \cdot 1] &= [r_2 f] - \frac{[r_1 r_2] [r_1 f]}{[r_1 r_1]} = \left\{ 1 - \frac{[r_1 f]}{[r_1 r_1]} \right\} \cdot \frac{s}{\rho''}; \\ [r_3 f \cdot 2] &= [r_3 f] - \frac{[r_2 r_3 \cdot 1] [r_2 f \cdot 1]}{[r_2 r_2 \cdot 1]} = \left\{ -1 - \frac{[r_2 f \cdot 1]}{[r_2 r_2 \cdot 1]} \right\} \cdot \frac{s}{\rho''}; \\ &\dots \dots \dots \\ [r_i f \cdot (i-1)] &= [r_i f] - \frac{[r_{i-1} r_i \cdot (i-2)] [r_{i-1} f \cdot (i-2)]}{[r_{i-1} r_{i-1} \cdot (i-2)]} = \\ &= \left\{ -1 - \frac{[r_{i-1} f \cdot (i-2)]}{[r_{i-1} r_{i-1} \cdot (i-2)]} \right\} \cdot \frac{s}{\rho''}. \end{aligned} \quad (14)$$

При $i \rightarrow \infty$ последовательность $\{[r_i f \cdot (i-1)]\}$ стремится к пределу X_u , который можно найти из уравнения

$$X_u = -1 - X_u/X_0 \rightarrow X_u = 0,9226. \quad (15)$$

Подставив теперь в (7) значения из (3), (6), (12) — (15), запишем выражение для оценки поперечного сдвига пункта

$$1/P_u = \frac{s^2}{\rho^2} \left[n - \frac{1}{12} - \frac{0,9226^2}{11,9161} (n-1) \right] = \frac{s^2}{\rho^2} (0,9286 n - 0,012). \quad (16)$$

Продольный сдвиг. Функция F_l в данной задаче (см. рисунок) имеет вид

$$F_l - L = s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sum_{i=1}^n s_i. \quad (17)$$

Примем в качестве ходовой линию, обозначенную на рисунке пунктиром, предполагая, что длина исходной стороны AC ряда равна s . Легко заметить, что длина промежуточной стороны s_i связана с длиной связующей стороны a_{i-1} соотношением

$$s_i = a_{i-1} \frac{\sin 2\gamma_i}{\sin \gamma_i}, \quad (18)$$

в свою очередь

$$a_i = s \cdot \prod_{j=1}^i \frac{\sin(1_j + 8_j) \cdot \sin 3_j}{\sin(4_j + 5_j) \cdot \sin 7_j}. \quad (19)$$

С учетом (18) и (19) выражение (17) примет вид

$$F_i = L = s \frac{\sin 2_i}{\sin 7_i} + s \cdot \sum_{i=2}^n \frac{\sin 2_i}{\sin 7_i} \cdot \prod_{j=1}^i \frac{\sin(1_j + 8_j) \cdot \sin 3_j}{\sin(4_j + 5_j) \cdot \sin 7_j}. \quad (20)$$

Теперь продифференцируем (20) и заменим поправки в углы поправками в азимуты соответствующих направлений. После приведения подобных членов весовая функция продольного сдвига примет вид

$$f_i = \frac{s}{\rho''} \left\{ \sum_0^{n-1} (A)_i - 2 \sum_0^n (D)_i + \sum_1^n (n-i+1) (C)_i \sum_1^{n-1} (n-1) (B)_i \right\}. \quad (21)$$

Квадратичные и неквадратичные коэффициенты весовой функции принимают следующие значения:

$$[ff] = \frac{s^2}{\rho^2} \left[n-1 + 4n + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \right. \\ \left. + \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} \right] = \frac{s^2}{\rho^2} \left(\frac{2}{3} n^3 + \frac{16}{3} n - 1 \right), \quad (22)$$

$$[r_1 f] = [r_n f] = 6 \cdot \frac{s}{\rho''},$$

$$[r_2 f] = [r_3 f] = \dots = [r_{n-1} f] = 7 \cdot \frac{s}{\rho''}. \quad (23)$$

Воспользовавшись рекуррентным соотношением (14), можно найти преобразованные неквадратичные коэффициенты весовой функции f_i^2 . Так же, как и в случае поперечного сдвига, последовательность $\{[r_i f_i(i-1)]\}$ при $i \rightarrow \infty$ имеет предел, который вычислим из соотношения

$$X_i = 7 - X_i/X_0, \quad X_i = 6,4580. \quad (24)$$

Подставляя в (7) значения соответствующих коэффициентов из (3), (6), (22)–(24), найдем

$$1/P_i = \frac{s^2}{\rho^2} \cdot \left[\frac{2}{3} n^3 + \frac{16}{3} n - 1 - \frac{6^2}{12} - \frac{6,4580^2}{11,9161} (n-1) = \right. \\ \left. = \frac{s^2}{\rho^2} \left[\frac{2}{3} n^3 - 1,833 n + \frac{1}{2} \right] \right]. \quad (25)$$

Средняя квадратическая погрешность связующих сторон. Согласно (18)

$$F_{a_i} = a_i = s \prod_{j=1}^i \frac{\sin(1_j + 8_j) \cdot \sin 3_j}{\sin(4_j + 5_j) \cdot \sin 7_j}. \quad (26)$$

Дифференцируя (26), переходим к поправкам в азимуты соответствующих направлений и определяем выражение весовой функции f_{a_i} для i -й связующей стороны

$$f_{a_i} = dF_{a_i} = \frac{s}{\rho''} \sum_{j=1}^i [(C)_j - (B)_j]. \quad (27)$$

Очевидно, что

$$[ff] = \frac{s^2}{\rho''} \cdot 2n, \quad (28) \quad [r_i f]_{i=1}^n = 0. \quad (29)$$

Подставляя соответствующие коэффициенты в (7), находим

$$1/P_{a_n} = \frac{s^2}{\rho^2} \cdot 2n. \quad (30)$$

Полученные формулы можно использовать и для оценки элементов сети удаленных от ее края на i фигур. В этом случае вместо переменной n в найденных формулах надо подставить число i .

Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны. Нетрудно показать, что искомая величина m_{a_i} , соответствующая i -й связующей стороне не зависит от ее удаления от начала сети и составляет

$$\begin{aligned} 1/P_{a_i} &= \begin{cases} 1 - 1/11,9161 - 1/11,9161 = \\ 1 - 1/11,9161 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0,832, & \text{при } i = \overline{1, n-1}; \\ 0,916, & \text{при } i = n, \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

и

$$m_{a_i} = \begin{cases} 0,912\mu, & \text{при } i = \overline{1, n-1}; \\ 0,957\mu, & \text{при } i = n. \end{cases} \quad (32)$$

Анализируя полученные формулы и сравнивая их с соответствующими формулами оценки точности ряда трилатерации из геодезических квадратов [1], видим, что в азимутальном ряде характер накопления погрешностей прямо противоположный тому, что мы имеем в цепи трилатерации. Так, накопление значений $1/P_i$, $1/P_n$ в исследуемой сети описываем полиномами соответственно третьей и первой степеней, а значений $1/P_{a_i}$, $1/P_a$ полиномами соответственно нулевой и первой степеней. Накопление тех же величин в ряде трилатерации представляем полиномами соответственно первой, третьей, первой и нулевой степеней. Если же сравнить численные значения погрешностей оцениваемых элементов в азимутальном и линейном рядах, то увидим, что при

условия равноточности линейных измерений и азимутальных определений, т. е. при условии $m_s/s = m_a''/\rho''$ имеют место приближенные равенства

$$m_{t_{az}} = m_{t_{трилат}}; \quad m_{a_{az}} = m_{t_{трилат}}; \quad m_{a_{az}}/s = m_{t_{трилат}}/\rho''. \quad (33)$$

В приведенных формулах m_t , m_a — средние квадратические продольный и поперечный сдвиги пунктов, а m_a и m_a'' — средние квадратические ошибки длины стороны и дирекционного угла связующих сторон соответственно для азимутального и трилатерационного рядов.

2 Известно, что дополнительные азимутальные определения в сетях трилатерации позволяют значительно повысить жесткость основы. В частности, такие определения приводят к существенному уменьшению поперечного сдвига ряда. Очевидно, что дополнительные базисные измерения в азимутальных сетях также способствуют увеличению жесткости обоснования.

Оценим точность азимутального ряда (см. рисунок), в котором дополнительно произведены базисные определения стороны a_n . В такой сети возникает система n условных уравнений вида (2) и одно базисное условное уравнение. Воспользовавшись (19), найдем вид этого уравнения

$$\frac{s}{\rho''} \sum_{j=1}^n [(C)_j - (B)_j] + W_{n+1} = 0. \quad (34)$$

Дополнительное условное уравнение (34) совместно с (2) доставляют одно дополнительное нормальное уравнение. Коэффициенты этого уравнения принимают значения

$$|r_j r_{n+1}| = \begin{cases} 0, & \text{при } j = 1, n; \\ 2n \cdot \frac{s^3}{\rho^3}, & \text{при } j = n + 1. \end{cases} \quad (35)$$

С учетом (3) и (35)

$$[r_{n+1} r_{n+1} \cdot n] - [r_{n+1} r_{n+1}] = 2n \cdot \frac{s^2}{\rho^2}. \quad (36)$$

Выполним оценку точности элементов ряда, удаленных от начала сети на i фигур ($i = 1, 2, \dots, n$). Нетрудно видеть, что сами выражения весовых функций, их квадратичные коэффициенты и преобразованные неквадратичные коэффициенты (за исключением члена $[r_{n+1} f \cdot n]$) будут такими же, как и в свободных сетях. Поэтому значения обратных весов функций оцениваемых элементов исследуемой сети будут равны соответствующим значениям обратных весов такой же свободной сети без члена

$$\frac{[r_{n+1} f \cdot n]}{[r_{n+1} r_{n+1} \cdot n]}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{P_{\text{всв}}} = \frac{1}{P_{\text{св}}} - \frac{[r_{n+1} f \cdot n]^2}{[r_{n+1} r_{n+1} \cdot n]}. \quad (37)$$

Значение коэффициентов $[r_{n+1}f \cdot n]$ получим в результате перемножения вектора коэффициентов уравнения (34) на вектор коэффициентов соответствующей весовой функции. Для весовых функций продольного и поперечного сдвигов пункта i и весовых функций длины и направления i -й связующей стороны a_i будем иметь

$$\begin{aligned} |r_{n+1}f|_l &= \frac{s^2}{\rho^2} \cdot i^2; & |r_{n+1}f|_a &= \frac{s^2}{\rho^2} \cdot i; \\ [r_{n+1}f]_a &= \frac{s^2}{\rho^2} \cdot 2i; & [r_{n+1}f]_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Легко заметить, что для всех весовых функций данной сети имеет место равенство

$$[r_{n+1}f \cdot n] = [r_{n+1}f]. \quad (39)$$

Подставляя коэффициенты (36), (39) в (37), находим

$$\begin{aligned} 1/P_{t_{\text{иссв}}} &= 1/P_{t_{\text{св}}} - \frac{i^4}{2n} \cdot \frac{s^2}{\rho^2} = \left(\frac{2}{3} i^3 - 1,8333 \cdot i - 0,5 - \frac{i^4}{2n} \right) \frac{s^2}{\rho^2}; \\ 1/P_{a_{\text{иссв}}} &= 1/P_{a_{\text{св}}} - \frac{i^2}{2n} \cdot \frac{s^2}{\rho^2} = \left(0,9286 i - 0,012 - \frac{i^2}{2n} \right) \cdot \frac{s^2}{\rho^2}; \\ 1/P_{\alpha_{\text{иссв}}} &= 1/P_{\alpha_{\text{св}}} - \frac{4i^2}{2n} \cdot \frac{s^2}{\rho^2} = 2i \left(i - \frac{i}{n} \right) \cdot \frac{s^2}{\rho^2}; \\ 1/P_{\alpha_{\text{иссв}}} &= 1/P_{\alpha_{\text{св}}}. \end{aligned} \quad (40)$$

3. Предположив, что в исследуемой сети сторона a_n , не являясь базисом, измерена с некоторой ошибкой μ_a , соизмеримой с ошибкой азимутальных определений μ_α , оценим, какой в этом случае следует ожидать эффект повышения точности сети по сравнению со свободным рядом.

Все измерений, как известно, вычисляют по формуле

$$P = c/m^2. \quad (41)$$

Приняв $c = \mu_a^2$, имеем

$$P_\alpha = 1 \text{ и } P_a = \mu_a^2/\mu_\alpha^2. \quad (42)$$

В исследуемой сети возникает система $n+1$ нормальных уравнений коррелят. При этом коэффициенты $[r_i r_j]$ ($i=1, n, j=1, n$) те же, что и в случае свободной сети (3). Остальные коэффициенты, как нетрудно показать, принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} [\pi r_j r_{n+1}]_{j=1}^n &= 0; \\ [\pi r_{n+1} r_{n+1}] &= \frac{s^2}{\rho^2} \cdot 2n + \frac{s^2}{\rho^2} \cdot \frac{\mu_a^2}{\mu_\alpha^2} = \frac{s^2}{\rho^2} \left[2n + \left(\frac{t_a}{t_\alpha} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$t_a = \frac{p_a}{a}, \quad t_a = \frac{p_a'}{p''}, \quad \pi = \frac{1}{p}. \quad (44)$$

С учетом (43) и (44)

$$[\pi r_{n+1} r_{n+1} \cdot n] = [\pi r_{n+1} r_{n+1}] = \frac{s^2}{p^2} \left[2n + \left(\frac{t_a}{t_a'} \right)^2 \right]. \quad (45)$$

Для элементов сети, удаленных от левого края на i фигур, коэффициенты $[rif]$ и $[rif(i-1)]$ можно определить, воспользовавшись формулами (38), (39). Тогда искомые формулы примут вид

$$\begin{aligned} 1/P'_i &= \left(\frac{2}{3} i^3 - 1,8333 i - 0,5 - \frac{i^4}{2n + \gamma^3} \right) \frac{s^2}{p^2}; \\ 1/P'_a &= \left(0,9286 i - 0,012 - \frac{i^2}{2n + \gamma^2} \right) \cdot \frac{s^2}{p^2}; \\ 1/P'_a &= \left(2i - \frac{4i^3}{2n + \gamma^2} \right) \cdot \frac{s^2}{p^2}; \\ 1/P'_a &= 1/P_{a_{cv}}, \quad \text{где } \gamma = \frac{t_a}{t_a'}. \end{aligned} \quad (46)$$

Список литературы: 1. Курузов Н. И. Накопление погрешностей в рядах триангуляции с измеренными сторонами. Изв. вузов. Геодезия и аэрофото-съемка, 1957, вып. 2. Halmos F. Evaluation of automatized gyrotheodolite measurements with special respect to MOM gyrotheodolites. - „Acta geod.“ geophys. et montanist. Acad. sci. hung., 1981, 16, № 1, 27—39.