

І.Ф.Монін

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ПОПРАВОК У ВИХІДНІ ДАНІ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ВИМІРІВ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ

В.Д.Шипулін [7] на основі розробок Ю.В.Лінника [3], Ю.А.Гордєєва [1], Ю.В.Кемніца [2] одержав загальні формули для врівноваження вимірів, даних у геодезичних мережах способом необхідних невідомих і корелат. На жаль, ніяких прикладів обчислень поправок він не наводить. У статтях [5, 6] ця задача розв'язана корелатним та параметричним способами з оцінкою точності і наведені приклади застосування поданої теорії. Через те, що оцінка точності в статті [5] параметричним способом дана приближно, роботи [5, 6] не були відображені в реферативному журналі. Відзначимо, що врівноваження вихідних даних та вимірів у геодезичних мережах доволі складна задача, мало відома, але дуже актуальна для геодезичного виробництва. Нижче, в доповнення до [5, 6], коротко подані найбільш прості формули обчислень поправок у вихідні дані та результати вимірів з оцінкою точності, а також наведено простий приклад застосування формул.

Корелатний спосіб. Найпростіше поправки у вихідні дані δM та результати вимірів V в цьому способі визначати за такими формулами [5]:

$$\delta M = -Q_{\mu} A_{\mu}^T N^{-1} W, \quad (1)$$

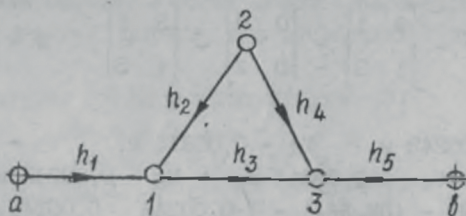
$$V = -Q A^T N^{-1} W, \quad (2)$$

$$A V + A_{\mu} \delta M + W = 0, \quad (3)$$

$$W = M_0 + A l + A_{\mu} M, \quad (4)$$

$$N = A Q A^T + A_{\mu} Q_{\mu} A_{\mu}^T, \quad (5)$$

де A , A_{μ} - матриці коефіцієнтів умовного рівняння (3); W - матриця вільних членів, яку обчислюють за формулою (4); N - матриця нормальних рівнянь, що її визначають за формулою (5); Q , Q_{μ} - кореляційні матриці результатів вимірювань l та вихідних даних M без постійного множника; N^{-1} - обернена матриця; M_0 - наближена матриця вихідних даних.



Нівелювання.

Оцінку точності врівноваження величин у цьому способі виконують таким чином:

$$m^2 = (V^T Q^{-1} V + \delta M^T Q_{\mu}^{-1} \delta M) / r, \quad (6)$$

$$m_F = m \sqrt{Q_F}, \quad (7)$$

де m - середня квадратична помилка одиниці ваги; r - кількість умовних рівнянь в геодезичній мережі; m_F - середня квадратична помилка врівноваженої функції F ; Q_F - обернена вага її. Наприклад:

$$Q_{M1} = Q_{\mu} - Q_{\delta M} = Q_{\mu} - Q_{\mu} A_{\mu}^T N^{-1} A_{\mu} Q_{\mu}, \quad (8)$$

$$Q_{11} = Q - Q_V = Q - Q A^T N^{-1} A Q, \quad (9)$$

де $M_1 = M + \delta M$, $l_1 = l + V$ - врівноважені вихідні дані та виміри. Формули (8) і (9) легко одержати за допомогою відомих правил а (1) і (2).

Приклад. Врівноважимо мережу нівелювання, зображену на рисунку. В ній пункти а і в відомі: $H_a = 47,654$ м, $H_b = 54,400$ м. Пункти 1, 2, 3 треба знайти. Виміряні перевищення такі: $h_1 = 15,224$ м, $h_2 = 6,199$ м, $h_3 = 7,579$ м, $h_4 = 13,800$ м, $h_5 = 16,053$ м. Довжини ходів майже однакові, виміри рівноточні. У цій мережі виникає два умовних рівняння

$$V_2 + V_3 - V_4 = 0,022 = 0,$$

$$V_1 + V_3 - V_5 + \delta H_a - \delta H_b + 0,004 = 0.$$

Нехай кореляційні матриці виміряних перевищень та вихідних даних відомі і дорівнюють одиничним матрицям п'ятого та другого порядків. Неважко написати матриці умовних рівнянь, нормальних рівнянь, обернену матрицю N^{-1} , матрицю вільних членів W і обчислити поправки V , δM :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -0,022 \\ 0,004 \end{pmatrix}.$$

$$N = AA^T + AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$V_1 = -0,00243 \text{ м}, \quad V_2 = 0,00814 \text{ м}, \quad V_3 = 0,00571 \text{ м},$$

$$V_4 = -0,00814 \text{ м}, \quad V_5 = 0,00243 \text{ м},$$

$$\delta M^T = (\delta H_A \delta H_B) = (-0,00243 \quad 0,00243) \text{ м}.$$

Подамо послідовні обчислення середніх квадратичних помилок

$$\begin{array}{lll} m_{H2} = ? & m_{H2} = ? & m_{H_B} = ? \\ f^T = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0), & f^T = (1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0), & f^T = (0 \ 1), \\ f^T f = 1, & f^T f = 2, & f^T f = 1, \\ f^T A^T = (1 \ 0), & f^T A^T = (-1 \ 1), & f^T A^T = (0 \ 1), \end{array}$$

$$f^T A^T N^{-1} = \frac{1}{14} (5 \ -1); \quad f^T A^T N^{-1} = \frac{1}{14} (-64); \quad f^T A^T N^{-1} = \frac{1}{14} (-13);$$

$$Q_{H2} = 0,643; \quad \frac{10}{14} = 0,714; \quad f^T A^T N^{-1} A f = \frac{3}{14} = 0,214;$$

$$m_{H2} = 0,00779 \text{ м}, \quad Q_{H2} = 2 = 0,714 = 1,286, \quad Q_{H_B} = 0,786,$$

$$m_{H2} = 0,00897 \text{ м}, \quad m_{H_B} = 0,00861 \text{ м},$$

де f - матриця коефіцієнтів вагової функції dF . Середню квадратичну помилку одиниці ваги обчислювали за формулою (6)

$$m = \sqrt{\frac{0,0001887429}{2}} = 0,00971 \text{ м}.$$

Якщо не враховувати помилки вихідних даних у мережі і врівноважувати мережу класичним корелатним способом, то нормальні рівняння, обернена матриця N^{-1} , поправки V та середні квадратичні помилки m_{H2} , m_{H2} будуть такі:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = (AA^T)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -0,022 \\ 0,004 \end{pmatrix},$$

$$V_1 = -0,00425 \text{ м}, \quad V_2 = 0,00875 \text{ м}, \quad V_3 = 0,00450 \text{ м},$$

$$V_4 = -0,00875 \text{ м}, \quad V_5 = 0,00425 \text{ м}, \quad m_{H2} = 0,00809 \text{ м},$$

$$m_{H2} = 0,01023 \text{ м},$$

бо помилка одиниці ваги в цьому випадку буде $m = 0,01023 \text{ м}$.

Параметричний спосіб. У цьому способі параметричні рівняння, нормальні рівняння, формули для обчислення поправок δM і V

в найбільш загальному вигляді записують так [5]:

$$B\delta x + B\delta M + L = V, \quad (10)$$

$$L = M_0 + B_\mu M - l, \quad (11)$$

$$\delta M = -N^{-1}R^TQ^{-1}L, \quad (12)$$

$$N_{11}\delta x + N_{12}\delta M + B^TQ^{-1}L = 0, \quad (13)$$

$$N^T_{12}\delta x + (N_{22} + Q^{-1}_\mu)\delta M + B^T_\mu Q^{-1}L = 0,$$

$$\delta x = -N^{-1}_{11}(B^T - N_{12}N^{-1}R^T)Q^{-1}L,$$

$$N_{11} = B^TQ^{-1}B, \quad N_{12} = B^TQ^{-1}B_\mu, \quad N_{22} = B^T_\mu Q^{-1}B_\mu,$$

$$N = Q^{-1}_\mu + N_{22} - N^T_{12}N^{-1}_{11}N_{12},$$

$$R^T = B^T_\mu - N^T_{12}N^{-1}_{11}B^T.$$

Виведемо формули для кореляційних матриць Q_{11} , врівноважених вимірів та $l_1 = l + V$ та Q_{M1} врівноважених вихідних даних $M_1 = M + \delta M$, використовуючи відомий алгоритм [6]

$$Q_F = A_0Q_1A_0^T, \quad (14)$$

де $F = F_0 + A_0l$, F_0 і A_0 - постійні параметри; l - матриця вимірів або вихідних даних M . Спочатку напишемо функцію для l_1

$$l_1 = l - BN^{-1}_{11}B^TQ^{-1}L - RN^{-1}R^TQ^{-1}L + L, \quad (15)$$

потім замість L підставимо в (15) вираз (11) і виділимо складові, що залежать від l і M

$$BN^{-1}_{11}B^TQ^{-1}l, \quad RN^{-1}R^TQ^{-1}l, \quad (16)$$

$$(E - BN^{-1}_{11}B^TQ^{-1} - RN^{-1}R^TQ^{-1})B_\mu M. \quad (17)$$

Далі вираз (17) спростимо за допомогою такої формули:

$$R = B_\mu - BN^{-1}_{11}B^TQ^{-1}B_\mu (E - BN^{-1}_{11}B^TQ^{-1} - RN^{-1}R^TQ^{-1})B_\mu M - (R - RN^{-1}R^TQ^{-1}B_\mu)M = RN^{-1}(N - R^TQ^{-1}B_\mu)M. \quad (18)$$

Після використання таких тотожностей:

$$R^TQ^{-1}R = N_{22} - N^T_{12}N^{-1}_{11}N_{12} - B^T_\mu Q^{-1}R,$$

$$N = Q^{-1}_\mu + N_{22} - N^T_{12}N^{-1}_{11}N_{12} - Q^{-1}_\mu + B^T_\mu Q^{-1}R,$$

$$R^TQ^{-1}B_\mu = B^T_\mu Q^{-1}R,$$

вираз (18) спрощується до

$$RN^{-1}Q^{-1}_\mu M. \quad (19)$$

Тепер формули (14) і (16), (19) дадуть:

$$Q_{11} = BN^{-1}_{11}B^T + RN^{-1}R^TQ^{-1}RN^{-1}R^T + RN^{-1}Q^{-1}_\mu N^{-1}R^T - BN^{-1}_{11}B^T + RN^{-1}(R^TQ^{-1}R + Q^{-1}_\mu)N^{-1}R^T = BN^{-1}_{11}B^T + RN^{-1}R^T.$$

Отже, ми отримуємо результат

$$Q_{11} = BN^{-1}_{11}B^T + RN^{-1}R^T. \quad (20)$$

Так само, на основі формул (14) і (12), знаходимо

$$Q_{\delta M} = N^{-1}R^TQ^{-1}B_\mu Q_\mu B^T_\mu Q^{-1}RN^{-1} + N^{-1}R^TQ^{-1}RN^{-1},$$

з беручи до уваги написані раніше тотожності і формулу $R^T Q^{-1} R = -N - Q_{\mu}^{-1}$, одержимо

$$Q_{\delta M} = N^{-1}(N - Q_{\mu}^{-1})Q_{\mu}(N - Q_{\mu}^{-1})N^{-1} + N^{-1}(N - Q_{\mu}^{-1})N^{-1} = Q_{\mu} - N^{-1}.$$

Отож,

$$Q_{M1} = Q_{\mu} - Q_{\delta M} = N^{-1}. \quad (21)$$

Розглянемо той самий приклад. Параметричні рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} V_1 &= \delta H_1 - \delta H_3 + (H_1 - H_3 - h_1), & L_1 &= 0, \\ V_2 &= \delta H_1 - \delta H_2 + (H_1 - H_2 - h_2), & L_2 &= 0, \\ V_3 &= -\delta H_1 + \delta H_3 + (H_3 - H_1 - h_3), & L_3 &= -0,004, \\ V_4 &= -\delta H_2 + \delta H_3 + (H_3 - H_2 - h_4), & L_4 &= -0,026, \\ V_5 &= \delta H_3 - \delta H_2 + (H_3 - H_2 - h_5), & L_5 &= 0. \end{aligned}$$

Підготуємо необхідні матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^T E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$N^{-1}_{11} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad N_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N^T_{12} N^{-1}_{11} N_{12} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$N_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix},$$

$$N^T_{12} N^{-1}_{11} N_{12} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$R^T = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad R^T L = \begin{pmatrix} 0,00425 \\ 0,00425 \end{pmatrix},$$

$$N_{12} N^{-1}_{11} R^T = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B^T - N_{12}N^{-1}R^T = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 17 & 15 & -16 & -1 & 3 \\ 0 & -14 & 0 & -14 & 0 \\ 3 & -1 & 16 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Тепер за формулами (12) і (13) знаходимо поправки

$$\delta M = \begin{pmatrix} \delta H_A \\ \delta H_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,00243 \\ 0,00243 \end{pmatrix}, \quad \delta x = \begin{pmatrix} \delta H_1 \\ \delta H_2 \\ \delta H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,00486 \\ -0,01300 \\ 0,00486 \end{pmatrix}$$

$$V^T = (-0,00243 \quad 0,00814 \quad 0,00572 \quad -0,00814 \quad 0,00243),$$

що збігаються з розв'язком корелятного способу врівноваження.

Виконаємо оцінку точності:

$$\begin{aligned} m_{H2} &= ? & m_{H2} &= ? & m_{H2} &= ? \\ f^T &= (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0), & (1 \ -1000), & f^T &= (0 \ 1) \\ f^T_B &= (1 \ -1 \ 0), & (0 \ 1 \ 0), & f^T_N^{-1} &= \frac{1}{14} (3 \ 11), \\ f^T_{BN^{-1}}{}_{11} &= \frac{1}{8} (1 \ -4 \ -1), & \frac{1}{8} (4 \ 8 \ 4), & f^T_N^{-1}f &= \frac{11}{14} = 0,786, \\ f^T_{BN^{-1}}{}_{11}B^Tf &= \frac{5}{8} = 0,625, & 1, & Q_{H2} &= 0,786, \\ f^T_R &= \frac{1}{8} (1 \ -1), & \frac{1}{8} (-4 \ 4), & m_{H2} &= 0,00861 \text{ м}, \\ f^T_{RN^{-1}} &= \frac{1}{8 \cdot 14} (8 \ -8), & \frac{2}{7} (-1 \ 1), \\ f^T_{RN^{-1}}R^Tf &= \frac{16}{8 \cdot 14 \cdot 8} = 0,01786, & \frac{2}{7} = 0,286, \\ Q_{H2} &= 0,643, & Q_{H2} &= 1,286, \\ m_{H2} &= 0,00779 \text{ м} & m_{H2} &= 0,00827 \text{ м}. \end{aligned}$$

Висновки. Врахування помилок вихідних даних при врівноваженні геодезичних мереж зменшує помилки врівноважених елементів і мережа стає точніша. Корелятний спосіб має менший обсяг обчислень, тому його краще застосовувати. Врівноваження вимірів та вихідних даних рекомендується застосовувати в дослідженнях

деформацій інженерних споруд і обробці високоточних вимірів. Роаглянута теорія математичної обробки вимірів найбільш загальна.

1. Гордеев Ю.А. О применении принципа наименьших квадратов при уравнивании зависимых результатов измерений // Геодезия и аэрофотосъемка. 1960. N 2. С.42-48. 2. Кемниц Ю.В. К обоснованию метода наименьших квадратов // Тр. МНИЗ. 1964. N 22. С.34-39. 3. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы обработки измерений. М., 1968. 4. Маркузе Ю.И. Математическая обработка измерений. Итоги науки и техники // Геодезия и аэрофотосъемка. 1985. Т. 23. С.50-55. 5. Монин И.Ф. Совместное уравнивание измерений и исходных данных // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1985. Вып.41. С.94-98. 6. Монин И.Ф. К оценке точности совместного уравнивания измерений и исходных данных // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. Вып.45. С.62-65. 7. Шипулин В.Д. Уравнивание геодезических сетей с учетом ошибок исходных данных // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1970. Вып.12. С.88-95.

РЕЦЕНЗІЯ

на статтю І.Ф.Моніна

"Алгоритм складання параметричних
рівнянь на основі умовних".

У статті роаглядається питання переходу від умовних рівнянь, що виникають в геодезичних мережах, до рівнянь помилок. У загальному випадку такий перехід доволі складний, і тому поставлене в роботі питання заслуговує на увагу.

Але послідовність розв'язання задачі і пояснення, якими воно супроводжується, незадовільні. Так, не наведено амісту матриць, що ускладнює розуміння самої суті методу розв'язання і його загальність.

Співвідношення (5), (6) подані без жодних пояснень.

Наводяться лише посилання на статтю, опубліковану в закордонному, маловідомому збірнику "Геодезия и фотограмметрия в горном деле".

Вважаю, що в такому вигляді статтю І.Ф.Моніна "Алгоритм складання параметричних рівнянь на основі умовних" не можна рекомендувати до друку.

Хижак Л.С.

РЕЦЕНЗІЯ

на статтю І.Ф.Моніна

"Про визначення поправок у вихідні дані
та результати вимірів геодезичних мереж"

Стаття є доповненням до опублікованих раніше робіт автора. У цій статті розглянута методика одержання поправок у вихідні дані і результати вимірів корелатним і параметричним методами. Перша частина повторює опубліковану методику (див. позицію [5] у списку літератури в статті) з прикладом включно. На наш погляд, цю частину не слід було поміщати в статтю. В другій частині, яка присвячена параметричному методу, наводиться метод знаходження кореляційних матриць вирівняних значень вимірів і вміщення даних, необхідних для оцінки точності результатів вирівнювання та їх функцій, на основі залежностей, одержаних в (6). Теоретичний виклад не супроводжується ніякими поясненнями, що ускладнює читання і перевірку наведених теоретичних міркувань.

Вважаю, що стаття може бути прорецензована лише після усунення вказаного недоліку.

Хижак Л.С.

У редакцію збірника
від проф.каф.ПГ ПП І.Ф.Моніна

15.05.95 я одержав дві негативні рецензії на мої статті "Про визначення поправок у вихідні дані та результати вимірів геодезичних мереж" і "Алгоритм складання параметричних рівнянь на основі умовних".

Рецензент робить зауваження неприципового характеру, щоб пояснити зміст деяких матриць та теоретичних викладок, а також

усунути повторення, що є в першій статті. Відносно достовірності (правильно або неправильно зроблено) рецензент нічого не пише.

Я не можу погодитись з цими рецензіями. Мої статті є доповненням до опублікованих раніше. Там є зміст матриць і детальні пояснення до одержання відповідних формул. Я намагався і тут пояснити зміст роботи, тому і навів без виведення формули корелятного врівноваження в першій статті. Окрім цього, агадані формули потрібні, бо я обчислюю поправки за ними. А це необхідно, щоб перевірити параметричні врівноваження в другій частині. Результати обчислень точно збігаються, що служить доказом правильності математичних викладок. Новим у першій статті є виведення формул для оцінки кореляційних матриць параметричного способу, а також приклад реальних обчислень, з яких видно ефективність способу (там є і обробка без урахування вихідних даних).

У другій статті доповнень я не можу зробити тому, що вже опублікована робота автора (див. позицію [2] у списку літератури в статті) має необхідні пояснення до формул, які тут застосовуються. Це буде повторенням.

Отже, я не бачу причин переробляти мої статті.

Якщо рецензент Л.С.Хижак не погодиться, прошу дати на розгляд мої статті проф. О.М.Марченко або проф. Б.М.Джуману.