УДК 528.33

М. И. МАРЫЧ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ЗЕМЛИ

1. Как известно, основной задачей в теории фигуры Земли Молоденского является определение возмущающего потенциала T по аномалиям силы тяжести

$$\Delta g = -\left(\frac{\partial T}{\partial \rho'} + \frac{2T}{\rho'}\right)_{\rho'=\rho}, \tag{1}$$

измеренным на физической поверхности Земли s. Решение этой краевой задачи выражается степенным рядом Молоденского [1]

$$\bar{T} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n k^n \tag{2}$$

по малому параметру k $(0 \leqslant k \leqslant 1)$, введенному в качестве коэффициента для всех высот $H = \rho - R$ рельефа поверхности s, отсчитываемых от произвольно выбранной сферы c, проходящей вне или внутри масс Земли. При этом радиус-вектор $\rho' = R + H + z$ каждой точки внешнего пространства, включая точки поверхности $s\,(z=0)$, рассматривается как функция от k, и ряд (2) выражает последовательность приближений $\bar{T} = T(k)$ потенциала T, строго удовлетворяющих граничному условию (1) лишь при $k=1$ [2, 3].

Таким образом, вопрос заключается в выводе формул, определяющих коэффициенты T_n, при котором на основании теоремы о тождественности степенных рядов (о единственности степенного ряда) можно рассматривать как угодно малую окрестность точки $k=0$.

2. Получим путем, указанным в [3], нулевое (стоксово) T_0 и первое T_0+T_1 приближения возмущающего потенциала вне Земли.

Так как решение задачи не зависит от краевой поверхности, то интеграл Стокса

$$T(\rho', \Theta, \lambda) = \frac{R^2}{4\pi} \int \Delta g_c \left[S(\rho', \psi) - \frac{1}{\rho'} \right] d\sigma, \tag{3}$$

записанный для любой сферы c ($R \geqq \rho_{max}$), можно рассматривать не только как интегральную формулу, определяющую потенциал на сфере и вне ее, а также как одно из выражений искомого потенциала во всем внешнем пространстве Земли и аналитическое продолжение аномалии (1) на сферу, расположенную внутри масс, может быть чисто формальным. Это позволяет при решении задачи Молоденского исходить из интеграла Стокса и разложения аномалии силы тяжести в ряд Тейлора по степеням высот H

$$\Delta g_c = \Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} H + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2} H^2 - \cdots, \tag{4}$$

несмотря на возможную расходимость ряда.

Действительно, ряд (4), полученный для хорошо известной функции

$$\frac{\partial T}{\partial \rho'} + \frac{2T}{\rho'} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-n) \frac{Y_n(\Theta, \lambda)}{\rho'^{n+2}},$$

приводит к результату

$$\Delta g_c = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \frac{Y_n(\Theta, \lambda)}{R^{n+2}}$$

независимо от выбора R и на основании ортогональности сферических функций коэффициент $R^{-(n+2)}$ сокращается с соответствующим коэффициентом в обобщенной функции Стокса

$$S(\rho', \psi) = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho'} \right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi),$$

умноженным на R^2. Следовательно, рассматриваемый интеграл выражает сумму ряда Лапласа

$$T(\rho', \Theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\Theta, \lambda)}{\rho'^{\,n+1}}$$

и при $R < \rho_{max}$, т. е. выражает тот же потенциал, который в методах Молоденского [1] и Бровара [4] выражается поверхностными плотностями.

Итак, в общем случае данный метод по существу заключается в определении потенциала для внешней сферы и его аналитического продолжения в остальную часть внешнего пространства Земли, что не объединяется классической формулой Стокса ($\rho' \geqslant R$). Принимая также во внимание независимость искомого потенциала от принятой земной сферы, можно заключить, что он не приводится к методу, обусловленному возможностью аналитического продолжения аномалий на внутреннюю сферу и основанное на этом решение задачи является математически строгим.

С целью определения коэффициентов T_n ряда (2) введем малый параметр k в выражение (3). Имеем.

$$\overline{T} = \frac{R^2}{4\pi} \int \overline{\Delta g_c} \left[S(\overline{\rho}', \psi) - \frac{1}{\overline{\rho}'} \right] d\sigma, \tag{5}$$

где

$$\overline{\Delta g_c} = \Delta g - \overline{\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}} kH + \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}} k^2 H^2 - \cdots, \tag{6}$$

$\overline{\rho}' = R + kH + z$ — радиус-вектор данной точки P, являющийся функцией от k, и z — расстояние этой же точки от поверхности s, не зависящее от k. Значение радиальных производных аномалий силы тяжести на поверхности s, входящих в (6), так же, как и потенциал T, рассматривают как функции от параметра k и выражаются степенными рядами

$$\overline{\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right)_n k^n, \quad \overline{\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2} \right)_n k^n$$

и т. д. [2]. Разлагая функции $S(\overline{\rho}', \psi)$ и $\frac{1}{\overline{\rho}'}$ в ряд Тейлора по степеням параметра k, после группировки членов в правой части (5) по степеням этого параметра, получаем

$$\overline{T} = \frac{R^2}{4\pi} \int \Big\{ (\Delta g_c)_0 \left(S_0 - \frac{1}{\rho_0'} \right) + \Big[(\Delta g_c)_0 \left(S_1 + \frac{\widetilde{H}}{\rho_0'^2} \right) +$$

$$+ (\Delta g_c)_1 \left(S_0 - \frac{1}{\rho_0'} \right) \Big] k + \Big[(\Delta g_c)_0 \left(S_2 + \frac{2\widetilde{H}}{\rho_0'^3} \right) + (\Delta g_c)_1 \left(S_1 + \frac{\widetilde{H}}{\rho_0'^2} \right) +$$

$$+ (\Delta g_c)_2 \left(S_0 - \frac{1}{\rho_0'} \right) \Big] k^2 + \cdots \Big\} d\sigma, \tag{7}$$

где

$$(\Delta g_c)_0 = \Delta g, \quad (\Delta g_c)_1 = -\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right)_0 H,$$

$$(\Delta g_c)_2 = -\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right)_1 H + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2} \right)_0 H^2$$

и т. д., $\rho_0' = R + z$ и

$$S_n = \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^n S(\bar{\rho}', \psi)}{\partial k^n} \mid k = 0$$

$(n = 0, 1, 2, \cdots)$. Величины $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0, \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_1, \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)_0, \cdots$ вычисляют по формулам, приведенным в работе [2]. Приравнивая между собой члены в (2) и (7), содержащие k в одинаковой степени, согласно теореме о единственности степенного ряда, получим формулы, определяющие T_n. Для первых двух коэффициентов они имеют такой вид:

$$T_0(\rho', \Theta, \lambda) = \frac{R^2}{4\pi}\int \Delta g \left(S_0 - \frac{1}{\rho_0'}\right) d\sigma \tag{8}$$

и

$$T_1(\rho', \Theta, \lambda) = \frac{R^2}{4\pi}\int \left[\Delta g\left(S_1 + \frac{\tilde{H}}{\rho_0'^2}\right) - \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H\left(S_0 - \frac{1}{\rho_0'}\right)\right] d\sigma, \tag{9}$$

где

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R}\int (\Delta g - \tilde{\Delta} g)\frac{d\sigma}{r_1^3} - \frac{2}{R}\Delta g, \tag{10}$$

$\tilde{\Delta} g$ — значение Δg в данной точке и $r_1 = 2\sin\frac{\psi}{2}$ [2].

Входящие в (8) и (9) значения функции $S(\rho', \psi)$ и ее первой производной по k при $k=0$ можно записать так:

$$S_0 = \frac{1}{R}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{\rho_0'}\right)^{n+1}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi) =$$

$$= \frac{2}{r_0'} + \frac{1}{\rho_0'} - \frac{3r_0'}{\rho_0'^2} - \frac{5R\cos\psi}{\rho_0'^2} - \frac{3R}{\rho_0'^2}\cos\psi \, ln\,\frac{r_0' + \rho_0' - R\cos\psi}{2\rho_0'}, \tag{11}$$

где

$$r_0' = \sqrt{R^2 + \rho_0'^2 - 2R\rho_0'\cos\psi};$$

$$S_1 = \left.\frac{\partial S(\bar{\rho}', \psi)}{\partial k}\right|_{k=0} = \left.\frac{\partial S(\bar{\rho}', \psi)}{\partial \bar{\rho}'}\,\frac{d\rho'}{dk}\right|_{k=0} = \frac{\partial S_0}{\partial \rho_0'}\tilde{H}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (9), находим

$$T_1 = -\frac{R^2}{4\pi}\int\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H\left(S_0 = \frac{1}{\rho_0'}\right) d\sigma + \frac{\partial T_0}{\partial \rho_0'}H, \tag{13}$$

где

$$\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0'} = \frac{R^2}{4\pi}\int \Delta g\,\frac{\partial\left(S_0 - \frac{1}{\rho_0'}\right)}{\partial \rho_0'} d\sigma$$

есть нулевое приближение первой радикальной производной потенциала T, относящееся к исследуемой точке P. Прибавляя и вычитая под интегралом в (13) величину $\frac{R}{\rho_0'}\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 \tilde{H}\left(S_0 - \frac{1}{\rho_0'}\right)$ и принимая во внимание разложение функции (10) в ряд по сферическим функциям

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 = -\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\,\Delta g_n$$

и ряд (11), после некоторых преобразований, в ходе которых использованы свойство ортогональности и теорема восстановления сферических функций, получаем

$$T_1 = -\frac{R^2}{4\pi}\int\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0\left(H - \frac{R}{\rho_0'}\tilde{H}\right)\left(S_0 - \frac{1}{\rho_0'}\right)d\sigma + T_0\frac{H}{\rho_0'}. \quad (14)$$

Формулы (8) и (14) определяют возмущающий потенциал T во внешнем пространстве Земли, включая поверхность $s\,(z \geqslant 0)$, в нулевом и первом приближениях Молоденского. Отметим, что в формуле (13) или (14) высоты H можно рассматривать как сумму отступлений эллипсоида от сферы, нормальных высот и высот квазигеоида в нулевом приближении $\left(\zeta_0 = \frac{T_0}{\gamma}\ \text{при}\ z = 0\right)$. Из этих же формул видно, что поправки в потенциал за учет рельефа эллипсоида и рельефа квазигеоида являются величинами пренебрегаемо малыми и можно в качестве высот H принять нормальные или нивелирные высоты.

3. Подставим приближения T_0 и T_0+T_1 в (1) и выясним, в какой степени они удовлетворяют граничному условию задачи. С этой целью предварительно найдем значения производных $\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0'}$ и $\frac{\partial T_1}{\partial \rho_0'}$ на физической поверхности Земли s, т. е. при $z=0$.

Дифференцируя функции (8) и (13), после соответствующих преобразований получаем

$$\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0'} = -\sum_{n=2}^{\infty}\Delta g_n\left(\frac{R}{\rho_0'}\right)^{n+2} - \frac{R^2}{\rho_0'^2}\Delta g_0 - \frac{2T_0}{\rho_0'},$$

где Δg_n — сферическая функция n-го порядка в аномалии Δg и

$$\frac{\partial T_1}{\partial \rho_0'} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H\right]_n\left(\frac{R}{\rho_0'}\right)^{n+2} + \frac{R^2}{\rho_0'^2}\left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H\right]_0 -$$
$$-\frac{2T_1}{\rho_0'} + 2\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0'}H + \frac{\partial^2 T_0}{\partial \rho_0'^2},$$

где

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial \rho_0'^2} = \frac{1}{\rho_0} \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n (n+2) \left(\frac{R}{\rho_0'}\right)^{n+2} + \frac{2R^2}{\rho_0'^3} \Delta g_0 - \frac{2}{\rho_0'} \frac{\partial T_0}{\partial \rho_0'} + \frac{2T_0}{\rho_0'^2}.$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0'}\right|_{z=0} = -\Delta g' - \frac{2T_0}{R}, \qquad (15)$$

где $\Delta g' = \Delta g - \Delta g_1$ — аномалия Δg без сферической функции первого порядка и

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial \rho_0'}\right|_{z=0} = \left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H\right]' - \left(\frac{\partial \Delta g'}{\partial \rho}\right)_0 H - \frac{2T_1}{R} + \frac{2T_0}{K}\frac{H}{R}, \qquad (16)$$

где

$$\left(\frac{\partial \Delta g'}{\partial \rho}\right)_0 = -\frac{1}{R}\sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n (n+2) - \frac{2\Delta g_0}{R},$$

$\left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H\right]'$ — редукция $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H$ без сферической функции первого порядка $\left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H\right]_1$.

Принимая во внимание, что $\rho = R + H$, получаем

$$\left.\frac{\partial T_0}{\partial \rho'} + \frac{2T_0}{\rho'}\right|_{\rho'=\rho} = -\Delta g' + \frac{2T_0}{R}\frac{H}{R}\left(1 - \frac{H}{R} + \cdots\right)$$

и

$$\left.\frac{\partial (T_0 + T_1)}{\partial \rho'} + \frac{2(T_0 + T_1)}{\rho'}\right|_{\rho'=\rho} =$$

$$= -\Delta g' - \left\{\left(\frac{\partial \Delta g'}{\partial \rho}\right)_0 H - \left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H\right]'\right\} - \frac{2T_0}{R}\frac{H^2}{R^2} + \cdots. \qquad (17)$$

Итак, при $T = T_0$ правая часть условия (1) равна аномалии Δg с точностью порядка $\frac{H}{R}$ и не содержит сферической функции первого порядка Δg_1, вызванной рельефом физической поверхности Земли. Она восстанавливается следующими приближениями потенциала, учитывающими этот рельеф. При $T = T_0 + T_1$ функция Δg_1 выражается вторым членом в правой части (17).

4. При определении последовательных приближений возмущающего потенциала в этих же приближениях (по степеням параметра k) определяется аномальная часть высот рельефа физической поверхности Земли s (высоты квазигеоида $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \ldots$) и не требуется переход от граничного условия (1), полученного на s, к условию на поверхности в первом приближении (теллуроиде), построенной путем наслоения нормальных высот на эллипсоид. Перенос аномалий Δg без их изменений из поверхности s на приближенно известную поверхность означает,

что суммарная поправка в потенциал за перенос аномалий и обратный перенос потенциала принимается равной нулю.

Решение задачи Молоденского, полученное с помощью интеграла Стокса (в сферическом случае), допускает следующую трактовку. Нулевое приближение (8) вычисляется по обобщенной формуле Стокса без учета поправки Молоденского, определяемой редукциями за аналитическое продолжение аномалий Δg вверх на внешнюю сферу и аналитическим продолжением потенциала вниз по радиусу-вектору в исследуемую точку P на расстояние $\tilde{H}$, равное высоте рельефа, соответствующей данной точке.

В первом приближении эта поправка вычисляется по формуле (13) или (14) и последовательно уточняется следующими приближениями. Так как решение задачи не зависит от выбора радиуса R, то формулы справедливы и для внутренней сферы или сферы радиуса, равного среднему радиусу Земли, несмотря на то, что их интерпретация в этом случае может и не иметь физического смысла.

Из выполненной подстановки возмущающего потенциала в первом приближении в граничное условие краевой задачи видно, что он удовлетворяет этому условию лишь при $k=1$, что вполне соответствует методу малого параметра.

Список литературы: 1. *Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131. 2. *Марыч М. И.* О решении задачи Молоденского с помощью ряда Тейлора. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1973, вып. 17. 3. *Марыч М. И.* Вычисление потенциала топографических масс в приближениях Молоденского. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1979, вып. 6. 4. *Бровар В. В.* О решении краевой задачи Молоденского. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1963, вып. 4.

Статья поступила в редколлегию 31. 12. 80

УДК 528.525.73.522.92

Д. И. МАСЛИЧ, Л. С. ХИЖАК,
И. И. ДИДУХ, Н. Д. ЙОСИПЧУК

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА НА ПУТИ ВИЗИРНОГО ЛУЧА ПО МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИМ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Как было показано в работе *, уравнение световой кривой включает коэффициент турбулентности и может быть представлено в виде ряда

---

* *Маслич Д. И., Хижак Л. С., Дидух И. И., Йосипчук Н. Д.* Определение коэффициента турбулентности по результатам измерения метеоэлементов и зенитных расстояний. — В кн.: Тез. докл. Второго совещания по атмосферной оптике. Томск, 1980.