

Прежде чем перейти к обсуждению полученных результатов, отметим особенности аномального гравитационного поля Луны, с которыми мы столкнулись при построении ковариационных функций. Если функция C_Φ для Луны имела «классический» характер КФ аномального геопотенциала — резкое убывание ковариации с возрастанием Φ , то функция C_λ оказалась осциллирующей с периодом примерно 30° , что ясно указывает на нестационарность аномального гравитационного поля Луны. Детальные исследования позволили в дальнейшем разделить общее поле на три региона, при этом первый регион охватывает практически всю обратную сторону Луны, а второй и третий — области видимой стороны — соответственно горную и область наиболее крупных круговых морей, содержащих масконы. Именно поэтому необходимо построить отдельные ковариационные функции для каждого из регионов, с одной стороны, и принудительно стационаризовать общее поле — с другой. Перед построением КФ (региональных и глобальной) из исходного поля аномалий радиальных ускорений силы тяжести (по регионам в отдельности и по всей рассматриваемой области в целом) был снят «тренд» в виде среднего арифметического из значений аномалий, отнесенных к центрам трапеций $5^\circ \times 5^\circ$. Можно предложить (подтверждается данными таблицы), что снятие «тренда» равносильно приближенному устранению влияния C_{20} .

Анализируя с учетом этих замечаний данные таблицы, можно сделать следующие выводы:

1. Для получения реальных оценок степенных дисперсий по рассматриваемой методике необходима принудительная стационаризация глобального аномального гравитационного поля Луны.

2. Региональные КФ не пригодны для нахождения степенных дисперсий глобального поля.

3. Наименее надежно определяются степенные дисперсии 6, 7, 11-го и 15-го порядков, что, с одной стороны, можно объяснить «сглаживающим характером» рассмотренной методики, а с другой — ошибками исходной информации (по оценке Феррари, именно на этих порядках следует ожидать максимальных ошибок в гармониках аномалий радиальных ускорений [3]).

4. Несмотря на ограниченность информации об аномальном гравитационном поле Луны, содержащейся в широтной КФ C_Φ , степенные дисперсии 2—5-го порядков, определенные по ней, достаточно хорошо согласуются со значениями Феррари.

Хотя использованная в работе информация ограничена по объему (практически при выводе КФ учтены аномалии радиальных ускорений только примерно для половины поверхности Луны), а сравнение выполнено по зависимым данным, исследования свидетельствуют как о правомочности применения методики У. Каулы для определения степенных дисперсий селенопотенциала, так и о справедливости выводов о статистических свойствах аномального поля Луны.

Список литературы: 1. Лебедев С. В. и др. Корреляционный анализ силы тяжести (Отчет НИР МИИГАиК. Рег. № 75 038 768). — М.: МИИГАиК, 1975. 2. Kaula W. Statistical and harmonic analysis of gravity. — J. Geophys. Res., 1959, v. 64, № 12. 3. Ferrari A. Lunar gravity: a harmonic analysis. — J. Geophys. Res., 1977, v. 82, № 20.

Статья поступила 5 мая 1980 г.

УДК 528.42

В. Е. ЗИНГЕР, В. В. КИРИЧУК

О ПРИМЕНЕНИИ МУЛЬТИКВАДРИКОВОГО МЕТОДА АППРОКСИМАЦИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В течение последних пятнадцати лет при решении ряда геодезических, геофизических и других задач широко применяют методы математического моделирования. Это, во-первых, обусловливается тем, что при изучении некоторых явлений часто необходимо при минимальном объеме наблюдений иметь детальную информацию об их характеристиках (значения силы тяжести, аномалий и т. д.); во-вторых, возросшими возможностями вычислительной техники, позволяющими автоматизировать процесс получения и обработки информации.

Поэтому наиболее удобными и перспективными оказались те методы моделирования, которые, с одной стороны, способствуют получению результатов с необходимой степенью точности, а с другой — легко могут быть реализованы на ЭВМ. Особый интерес в этом отношении представляет мультиквадриковый метод, предложенный Р. Л. Харди [5] и основанный на идее представления нерегулярных (математически неопределенных) поверхностей суммой широкого ряда регулярных (математически определенных), в частности квадратичных форм, или им подобных аналитических выражений.

Наиболее общий вид мультиквадрикового уравнения описывается формулой

$$C_j[Q(x_i, y_i, x_j, y_j, \delta)] = z_i; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $Q(x_i, y_i, x_j, y_j, \delta)$ — частная квадратичная форма (или квадрика), определяемая как поверхность второго порядка; x_j, y_j — координаты фиксированных точек на поверхности, для которых получены коэффициенты мультиквадриковых функций C_j (в дальнейшем называем их узловыми); x_i, y_i — координаты текущей точки, для которой отыскивается значение количественной характеристики явления z_i ; δ — положительная или равная нулю константа. Сумма таких уравнений выражает искомую мультиквадриковую поверхность:

$$\sum_{j=1}^n C_j[Q(x_i, y_i, x_j, y_j, \delta)] = z_i. \quad (2)$$

Как видно из последнего уравнения, чтобы выполнить моделирование с помощью мультиквадрикового метода, необходимо: образовать систему мультиквадриковых уравнений; решить эту систему с целью отыскания неизвестных параметров уравнений — коэффициентов C_j и положительной константы δ ;

выполнить оценку модели, позволяющую судить об ее пригодности для представления конкретного физического явления.

Чтобы образовать систему мультиквадриковых уравнений, необходимо в первую очередь задать вид частной квадрати. Большинство исследований мультиквадрикового метода [1, 2, 4, 5] связано с представлением квадратичной формы в виде

$$Q(x_i, y_i, x_j, y_j, \delta) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + \delta}, \quad (3)$$

дающем возможность выполнять моделирование изучаемого явления в случае, когда координаты фиксированных и текущих точек заданы в прямоугольной системе координат. Это удобно при моделировании небольших по площади участков. Однако при решении задач, связанных с глобальным изучением физических полей Земли, Луны и других космических тел, целесообразно применять следующее выражение для частной квадрати [6]:

$$Q(\theta_i, \lambda_i, \theta_j, \lambda_j, \delta) = \sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2}\right) + \delta}, \quad (4)$$

которая в свою очередь приводит к такому выражению для всей мультиквадриковой поверхности:

$$\sum_{j=1}^n C_j \sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2}\right) + \delta} = z_i, \quad (5)$$

где θ_i, λ_i и θ_j, λ_j — полярные расстояния и долготы узловых и текущих точек соответственно. Из решения системы нелинейных уравнений (5) можно отыскать $n+1$ неизвестное: коэффициентную константу δ . Процесс решения такой системы достаточно сложен и трудоемок даже при использовании ЭВМ. В то же время в случае, когда значение δ известно или определено заранее на основании тех или иных соображений, отыскать неизвестные коэффициенты C_j можно, решая систему линейных уравнений.

Поэтому исследуем влияние значения δ на точность аппроксимации, тем более, что различные авторы [1—4] дают неодинаковые рекомендации относительно выбора оптимального значения δ , основанные, как правило, на экспериментальных данных.

Так, автор мультиквадрикового метода Р. Л. Харди предложил при аппроксимации рельефа местности использовать

$\delta = 0$. В дальнейшем он же получил эмпирическую формулу для определения значения положительной константы

$$\delta = 0,665 \cdot D^2, \quad (6)$$

где D — сторона квадрата прямоугольной сетки квадратов, на которую разбивается аппроксимируемый участок.

Аналогичную формулу предложил В. Гепферт:

$$\delta = 0,6 S_{\min}^2, \quad (7)$$

где $S_{\min} = \min(S_{ij})$ — расстояние между точками с индексами i и j ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, n$). В работе [1] высказано предположение, что оптимальная величина имеет тот же порядок, что и квадрат стороны участка аппроксимации.

Чтобы отыскать оптимальное значение δ и выяснить его влияние на точность моделирования в случае использования уравнения мультиквадрической поверхности (5), был проведен ряд экспериментов по аппроксимации различных как по площади, так и по физической природе полей. В частности, выполнено моделирование поля аномалий силы тяжести Луны двух регионов, охватывающих экваториальную зону ($45^\circ N - 45^\circ S$) и имеющих по долготе протяженность $90^\circ - 180^\circ$ и $180^\circ - 270^\circ$; и некоторой фиктивной нерегулярной поверхности поправок за рельеф в силу тяжести (район Западных Карпат площадью $11 \cdot 10^3 \text{ км}^2$).

Исходя из вида выражения (5), нами *a priori* выделен интервал допустимых значений

$$0 \leq \delta < 1. \quad (8)$$

В дальнейшем при определении коэффициентов мультиквадрических функций в качестве δ в выражении (5) последовательно подставлялся ряд чисел, удовлетворяющих неравенству (8). Результаты проведения численных экспериментов приведены в табл. 1, 2.

Как свидетельствуют результаты вычислений, независимо от физической природы моделируемого явления нет необходимости определять точное значение константы δ , так как уточнение значения δ не дает значительного повышения точности. Следовательно, в дальнейшем, чтобы применять данную методику, систему нелинейных уравнений можно не решать: достаточно знать только порядок положительной константы.

При известном значении δ , как отмечалось, проблема отыскания неизвестных коэффициентов сводится к решению системы линейных уравнений (5) с n неизвестными. В случае, когда количество опорных точек совпадает с числом точек, в которых определяются неизвестные коэффициенты (узловых точек), последние определяются из решения системы

$$Z = QC, \quad (9)$$

где Z — матрица-столбец $(n \times 1)$ значения моделируемого признака в опорных точках; Q — матрица $(n \times m)$, элементы которой являются значениями частных квадратик в соответствующих узловых точках; C — матрица-столбец $(m \times 1)$ неизвестных коэффициентов мультиквадриковых функций. Тогда

$$C = Q^{-1}Z. \quad (10)$$

Таблица 1
Зависимость точности моделирования поля аномалий силы тяжести Луны от выбора δ

δ	$m_{\Delta g}$, мгал		δ	$m_{\Delta g}$, мгал	
	I участок	II участок		I участок	II участок
1,0	428,5	3021,5	$0,1 \cdot 10^{-3}$	14,6	14,3
0,1	26,1	27,1	$0,2 \cdot 10^{-3}$	14,1	13,9
$0,1 \cdot 10^{-1}$	18,9	19,2	$0,3 \cdot 10^{-3}$	13,3	13,3
$0,1 \cdot 10^{-2}$	13,5	14,0	$0,4 \cdot 10^{-3}$	13,1	12,8
$0,1 \cdot 10^{-3}$	14,6	14,3	$0,5 \cdot 10^{-3}$	14,2	12,2
$0,1 \cdot 10^{-4}$	15,3	15,0	$0,6 \cdot 10^{-3}$	16,4	12,7
$0,1 \cdot 10^{-5}$	15,5	16,0	$0,7 \cdot 10^{-3}$	15,1	13,4
$0,1 \cdot 10^{-6}$	15,6	15,9	$0,8 \cdot 10^{-3}$	12,4	13,9
$0,1 \cdot 10^{-7}$	15,6	16,2	$0,9 \cdot 10^{-3}$	12,9	14,4
0,0	40,0	38,8	$1,0 \cdot 10^{-3}$	13,5	14,0

Таблица 2
Зависимость точности моделирования поля поправок за рельеф в силу тяжести (район Западных Карпат)

δ	$m_{\Delta g}$, мгал	δ	$m_{\Delta g}$, мгал
1,0	8803,5	$0,1 \cdot 10^{-7}$	9,3
0,1	1394,2	$0,2 \cdot 10^{-7}$	9,9
$0,1 \cdot 10^{-1}$	738,7	$0,3 \cdot 10^{-7}$	9,4
$0,1 \cdot 10^{-2}$	217,2	$0,4 \cdot 10^{-7}$	8,9
$0,1 \cdot 10^{-3}$	506,3	$0,5 \cdot 10^{-7}$	8,6
$0,1 \cdot 10^{-4}$	12,8	$0,6 \cdot 10^{-7}$	8,0
$0,1 \cdot 10^{-5}$	10,5	$0,7 \cdot 10^{-7}$	8,2
$0,1 \cdot 10^{-6}$	8,1	$0,8 \cdot 10^{-7}$	8,6
$0,1 \cdot 10^{-7}$	9,3	$0,9 \cdot 10^{-7}$	8,6
0,0	11,8	$1,0 \cdot 10^{-7}$	8,1

Когда же число опорных точек превышает количество узловых точек ($m > n$), коэффициенты C_j находят, решая систему (9) под условием

$$[V^2] = \min, \quad (11) \quad \text{где} \quad V = QC - Z; \quad (12)$$

V — матрица-столбец поправок.

Тогда

$$C = (Q^T Q)^{-1} \cdot (Q^T Z). \quad (13)$$

Отметим, что применение метода наименьших квадратов для отыскания неизвестных величин (в нашем случае C_j , $j=1$,

$2, \dots, m$) предполагает, что и используемые функции (Q_{ij} , $i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, m$), и их значения (Z_i , $i=1, 2, \dots, n$) являются случайными, т. е. независимыми. Иными словами,

$$MO(Z) = 0. \quad (14)$$

В общем случае числовые характеристики моделируемого физического поля (высоты топографической поверхности, аномалии силы тяжести, поправки за рельеф и др.) не удовлетворяют этому условию. Поэтому в дальнейшем при определении коэффициентов мультиквадриковых функций, согласно формуле

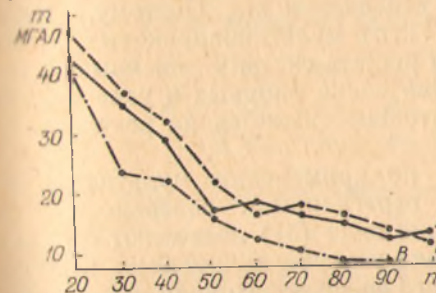


Рис. 1. Зависимость точности моделирования от числа узловых точек.

A, B — при моделировании поля аномалий силы тяжести Луны; B — при моделировании поля поправок за рельеф в силу тяжести для района Западных Карпат.

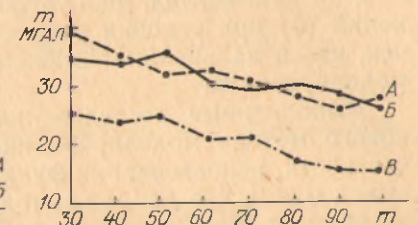


Рис. 2. Зависимость точности моделирования от числа опорных точек при постоянном числе узловых точек ($n=30$).

A, B — при моделировании поля аномалий силы тяжести Луны; B — при моделировании поля поправок за рельеф в силу тяжести для района Западных Карпат.

(13), необходимо вместо исходных использовать некоторые центрированные значения Z' , получаемые с помощью выделения систематической части (тренда) $\tilde{Z}$ и вычисленные относительно поверхности тренда

$$z'_i = z_i - \tilde{Z}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Нетрудно заметить, что если в качестве тренда выбрать среднее арифметическое из всех значений z_i опорных точек, то полученные центрированные значения удовлетворят условие (14). В этом случае окончательные числовые характеристики моделируемого поля получаем по формуле

$$Z = QC + \tilde{Z}. \quad (16)$$

В работе [7] отмечается, что при использовании различных методов аппроксимации, на точность моделирования существенно влияет объем исходной информации. Поэтому интересно проследить зависимость точности моделирования поверхности от количества опорных и узловых точек, для чего выполнено моделирование поля аномалий силы тяжести Луны для тех же, что и ранее, регионов и для различных комбинаций n и m . Единственным ограничением, накладываемым на количество

опорных и узловых точек, являлся объем памяти используемой ЭВМ. Результаты, представленные на рис. 1, свидетельствуют, что с увеличением числа узловых точек n точность моделирования повышается. Однако при достижении некоторого достаточно большого числа (в нашем эксперименте $n \geq 60$) дальнейшего существенного повышения точности не наблюдается.

Как видно из рис. 2, увеличение числа m опорных точек, т. е. использования дополнительной информации для определения неизвестных коэффициентов C_j , существенно не влияет на точность моделирования, хотя точность и имеет некоторую тенденцию к повышению при увеличении m . Поэтому, чтобы найти параметры C_j ($j=1, 2, \dots, n$) мультиквадриковых функций (5) при условии равенства числа опорных и узловых точек, что в дальнейшем незначительно скажется на результатах моделирования.

Выполненные исследования по применению мультиквадрикового метода моделирования нерегулярных поверхностей (в частности, использование функции вида (5)) позволяют сделать вывод о том, что данная методика успешно может быть использована для аппроксимации любого физического поля независимо от его природы, сложности, размеров. Точность аппроксимации обуславливается числом узловых точек, т. е. количеством коэффициентов мультиквадриковых функций, и почти не зависит от числа опорных точек.

Список литературы: 1. Шульман М. В., Мительман Е. Я. Мультиквадриковый метод аппроксимации топографической поверхности. — Геодезия и картография, 1974, № 2. 2. Шульман М. В., Мительман Е. Я. Цифровые модели и их использование при съемке рельефа суши и дна акваторий континентального шельфа. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1978, № 4. 3. Göpfert W. Interpolationsergebnisse mit der Multiquadratischen Methode. — Vermessungs, 1977, v. 102, № 10. 4. Hardy R. L. Multiquadric equations of topography and other surfaces. — J. Geophys. Res. 1971, v. 76. 5. Hardy R. L. Research resulting in the application of Multiquadric Equations to Surveying and Mapping Problems. — Surveying and Mapping, 1975, v. 35, № 4. 6. Hardy R. L. Least square prediction. — Photogram. Eng. and Remote Sens., 1977, v. 43, № 4. 7. Schut G. H. Review of interpolation methods for digital terrain models. — Can. Surv. 1976, v. 30, № 5.

Статья поступила 1 апреля 1980 г.

УДК 528.236

В. Г. КИРИЛЛОВ

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вопросы преобразования пространственных прямоугольных координат актуальны не только в пространственной геодезии [9], но и в аналитической фотограмметрии [7, 8, 10—12].

К. Риннер отметил [9], что в круг основных задач пространственной геодезии входят: определение положения пункта при помощи направлений, углов и расстояний в пространстве; ориентирование пучка лучей и линейное конформное преобразование в пространстве хода

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ Y^1 \\ Z^1 \end{bmatrix} = m \cdot A \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где m — масштабный множитель;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ — матрица вращения.}$$

Матрица A должна быть ортогональной, т. е. удовлетворять условиям:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1; & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0; \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1; & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0; \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1; & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Определение параметров преобразования называют «проблемой абсолютного ориентирования» [12, 14] или «проблемой вращений и сдвига» [10]. Ф. Сансо [10] сформулировал ее так: «В двух декартовых трехмерных системах R и S с двумя различными ортами вычислены или измерены координаты определенного числа общих для этих систем пунктов. Необходимо найти масштабный множитель m , вектор сдвига $\delta X_0, \delta Y_0, \delta Z_0$ и матрицу вращения A , которые переводят векторы системы R в векторы системы S согласно уравнения (1)». Под «проблемой абсолютного ориентирования» понимают задачу перехода от фотограмметрических координат маршрута или блока к геоцентрическим.

Масштаб m и сдвиги $\delta X_0, \delta Y_0, \delta Z_0$ определить не сложно, но вычисление элементов a_{ij} матрицы осложнено связывающими эти элементы условиями ортогональности (2).

Известно несколько методов получения элементов ортогональной матрицы преобразования координат [8—11], которые можно подразделить на две группы:

а) вычисление элементов a_{ij} ортогональной матрицы заданной структуры (например, «матрицы Родрига»). Решение выполняется по замкнутым формулам [9, 11—13] или итерационно [10];

б) вычисление элементов a_{ij} ортогональной матрицы неизвестной структуры. Решение — итерационное [7, 8].

Методы первой группы основаны на теореме 8.4.9 из работы [5], согласно которой любую ортогональную матрицу A можно