

Список литературы: 1. Воронцов П. А. Микроаэрометрические исследования приграничного слоя атмосферы. — М.: Гидрометеоиздат, 1960. 2. Воронцов П. А. Строение нижнего слоя атмосферы (0—0,5 км) в период Днепровской экспедиции. — Тр. ГГО, 1963, вып. 144/40. 3. Кравцов Н. И. Об измерении длины линий радиодальномерами в две видимости. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1971, вып. 14. 4. Островский А. Л. Исследования влияния атмосферы на точность радиодальномерных измерений на всхолмленной местности. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1969, вып. 10. 5. Селицкая В. И. Суточный и годовой ход метеорологических элементов в нижнем слое воздуха 0,5 км над поселком Войеково. — Тр. ГГО, 1962, вып. 135.

Работа поступила в редакцию 17 декабря 1979 года.

УДК 528.33.35

В. В. ЛОЗИНСКИЙ

ТОЧНОСТЬ ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА В СЕРЕДИНЕ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА ИЗ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Вопросы исследования распределения ошибок в свободных линейно-угловых рядах, состоящих из центральных систем или из двух рядов равносторонних треугольников, уже освещались в работах [1—4]. Что же касается рядов из центральных систем, проложенных между жесткими пунктами, то данные об их исследованиях в литературе отсутствуют.

Цель настоящей работы — получить формулы для подсчета обратного веса функции дирекционного угла связующей стороны в середине линейно-углового ряда, состоящего из центральных систем и уравненного за условия фигур, сторон, горизонта, дирекционных углов и координат.

Если такой ряд, в котором измерены все углы и стороны, проложен между исходными пунктами (рисунок), то при уравнивании его по методу условных измерений возникает $4N+2$ условных уравнений фигур, $8N+4$ синусных условных уравнений двух видов, N условных уравнений горизонта, условное уравнение дирекционных углов и условные уравнения абсциссы и ординаты (N — число центральных систем в ряду).

Виды условных уравнений фигур, сторон и горизонта приведены в работах [1, 4], а условные уравнения дирекционных углов и координат будут:

$$\sum_{i=1}^n (3i-1)(-1)^i + w_a = 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{i=0}^n \left(\frac{(b_i)}{b_i} \right) (-1)^i + \frac{1}{2} [n(2) - (n-1)(5) + \\ + (n-2)(8) - \dots] + w_x = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \left(\frac{(b_i)}{b_i} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} [(2) + (8) + (14) + \cdots + (3n - 1)] + w_y = 0, \quad (3)$$

где i — порядковый номер треугольника в верхнем ряду; (b_i) — вероятнейшие поправки к углам и сторонам; n — число треугольников в верхнем ряду; w — свободные члены условных уравнений.

Весовая функция для дирекционного угла k -й связующей стороны треугольника верхнего ряда

$$dF_{\alpha_k} = \sum_{i=1}^k (3i - 1)(-1)^i. \quad (4)$$

При решении нормальных уравнений погрешности угловых измерений в радианах и относительные линейные считались равноточными.

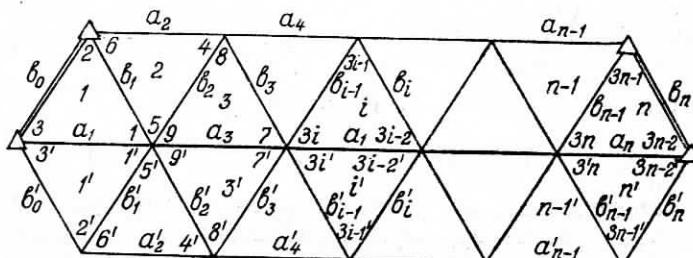


Схема линейно-углового ряда из центральных систем.

Решение нормальных уравнений выполнялось по методу двух групп. В первую группу были включены условные уравнения фигур, во вторую — все остальные условные уравнения. Преобразование коэффициентов второй группы производили так, как показано в работах [1—3]. Обозначим преобразованные коэффициенты условных уравнений сторон через a_i , b_i , условных уравнений горизонта — через c_j ($j = 1, 2, 3, \dots, N$), условного уравнения дирекционных углов — через d , условного уравнения ординаты — через e , условного уравнения абсциссы — через g , а коэффициенты весовой функции — через f_α .

Из решения нормальных уравнений найдем квадратичные коэффициенты эквивалентной системы. Условные уравнения сторон первого вида не имеют общих поправок, поэтому $[a_1 a_1] = 1,6667$; $[a_1 a_1] = 2,6667$.

Для нижнего ряда треугольников коэффициенты этого вида уравнений (при нечетных i) $[a_i' a_i' \cdot n] = 2,0667$; $[a_i' a_i' (n+i-1)] = 2,2917$.

Квадратичные коэффициенты второго вида синусных условных уравнений соответственно для верхнего и нижнего рядов треугольников: $[b_1 b_1 \cdot 2n] = 1,2056$; $[b_2 b_2 (2n+1)] = 1,3563$;

$$[b_i b_i (2n+i-1)] = 1,3866; \quad [b_n b_n (3n-1)] = 0,7646;$$

$$[b_1' b_1' \cdot 3n] = 1,4153; \quad [b_2' b_2' (3n+1)] = 1,3410;$$

для нечетных i при $3 \leq i < n$

$$[b_i' b_i' (3n+i-1)] = 1,3430;$$

для четных i при $2 < i < n-1$

$$[b_i' b_i' (3n+i-1)] = 1,3310;$$

при $i=n-1$

$$[b_i' b_i' (4n-2)] = 1,3184;$$

при $i=n$

$$[b_n' b_n' (4n-1)] = 1,7020.$$

Квадратичные коэффициенты последующих условных уравнений второй группы выражаются следующими формулами:

$$[c_f c_j (4n+j-1)] = 3 - \frac{0,3}{c_{j-1}}, \text{ где } c_{j-1} = [c_{j-1} c_{j-1} (4n+j-2)];$$

$$\begin{aligned} [dd(4n+N)] &= 0,2928N + 0,5318; \quad [ee(4n+N+1)] = \\ &= 0,1928N + 0,0502; \quad [gg(4n+N+2)] = 0,02(2N+1)(N^2+N+6). \end{aligned}$$

Для определения веса функции дирекционного угла связующей стороны используем формулу обратного веса, которую запишем следующим образом:

$$\frac{1}{P_{f_a}} = [f_a f_a] - \left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_4} + \frac{1}{P_5} + \frac{1}{P_6} + \frac{1}{P_7} + \frac{1}{P_8} \right), \quad (5)$$

где $\frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{P_3}$ и т. д. — значения величин, вносимых условными уравнениями второй группы в обратный вес функции.

Квадратичный коэффициент для весовой функции дирекционного угла имеет значение

$$[f_{a_k} f_{a_k}] = \frac{2}{3}k. \quad (6)$$

Определим величины $\frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{P_3}$ и т. д. Синусные условные уравнения первого вида с весовой функцией образуют соответственно для верхнего и нижнего ряда треугольников такие коэффициенты эквивалентной системы:

$$[a_i f_{a_k}(i-1)] = (-1)^i 0,5774 \text{ при } 1 \leq i \leq k; \quad [a_i f_{a_k}(i-1)]|_{i=k+1}^n = 0;$$

$$[a'_i f_{a_k} n] = 0,3464; \quad [a'_i f_{a_k}(n+i-1)] = 0,2165 \text{ при } 3 \leq i \leq n-2.$$

Для синусных условных уравнений второго вида и весовой функции дирекционного угла

$$[b_1 f_{a_1} \cdot 2n] = 0,1490; [b_1 f_{a_k} \cdot 2n] = 0,3655 \text{ при } 1 < k \leq n - 1;$$

$$[b_2 f_{a_k} (2n + 1)] = -0,3890 \text{ при } 2 < k \leq n - 1;$$

$$[b_1' f_{a_1} \cdot 3n] = 0,2421; [b_1' f_{a_2} \cdot 3n] = -0,2566;$$

$$[b_1' f_{a_k} \cdot 3n] = -0,2510.$$

Остальные значения неквадратичных коэффициентов этих видов уравнений ввиду объемности материала здесь не приводятся. Эти значения рассмотрены автором в статье*.

Значения величин, вносимых синусными условными уравнениями в обратный вес функции дирекционного угла, выражаются следующими формулами:

$$\frac{1}{P_1} = \sum_{i=1}^n \frac{[a_i f_a (i-1)]^2}{[a_i a_i (i-1)]} = 0,125k + 0,075; \quad (7)$$

для нечетных k

$$\frac{1}{P_2} = \sum_{i=1,3,5,\dots}^n \frac{[a_i' f_a (n+i-1)]^2}{[a_i' a_i' (n+i-1)]} = 0,0102k + 0,0478;$$

для четных k

$$\frac{1}{P_2} = \sum_{i=1,3,5,\dots}^n \frac{[a_i' f_a (n+i-1)]^2}{[a_i' a_i' (n+i-1)]} = 0,0102k + 0,0376. \quad (8)$$

Далее для нечетных k

$$\frac{1}{P_3} = \sum_1^n \frac{[b_i f_{a_k} (2n+i-1)]^2}{[(b_i b_i) (2n+i-1)]} = 0,1205k - 0,0990; \quad (9)$$

для четных k

$$\frac{1}{P_3} = \sum_1^n \frac{[b_i f_{a_k} (2n+i-1)]^2}{[(b_i b_i) (2n+i-1)]} = 0,1221k - 0,1180;$$

для нечетных k

$$\frac{1}{P_4} = \sum_1^n \frac{[b_i' f_{a_k} (3n+i-1)]^2}{[b_i' b_i' (3n+i-1)]} = 0,0196k + 0,0282. \quad (10)$$

* Лозинский В. В. Точность дирекционного угла связующих сторон ряда из центральных систем линейно-угловой триангуляции, проложенной между сторонами с исходными дирекционными углами. — Геодезия, карто-графия и аэрофотосъемка, 1980, вып. 31.

для четных k

$$\frac{1}{P_4} = \sum_{i=1}^n \frac{[b'_i f_{a_k}(3n+i-1)]^2}{[b'_i b'_i(3n+i-1)]} = 0,0208 k + 0,0108.$$

Для уравнений горизонта и весовой функции неквадратичные коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned}[c_1 f_{a_1} \cdot 4n] &= 0,1756; [c_1 f_{a_2} \cdot 4n] = 0,7352; [c_1 f_{a_3} \cdot 4n] = 0,981; \\ [c_2 f_{a_1} (4n+1)] &= 0,0329; [c_2 f_{a_2} (4n+1)] = 0,1083; \\ [c_2 f_{a_3} (4n+1)] &= 0,408; [c_2 f_{a_4} (4n+1)] = 0,9504.\end{aligned}$$

Последующие коэффициенты этого вида с ошибкой не более 3% равны

$$[c_1 f_{a_k} 4n] = 0,9480;$$

$$\begin{aligned}[c_j f_{a_k} (4n+j-1)] &= 1,200 \text{ при } j = 2,3,4,\dots \text{ и } k \geq 5,7,9,\dots; \\ [c_j f_{a_k} (4n+j-1)] &= 0,1400 \text{ при } j = 3,4,5,\dots \text{ и } k = 4,6,8,\dots; \\ [c_j f_{a_k} (4n+j-1)] &= 0,0688 \text{ при } j = 3,4,5,\dots \text{ и } k = 3,5,7,\dots; \\ [c_j f_{a_k} (4n+j-1)] &= 0,4420 \text{ при } j = 3,4,5,\dots \text{ и } k = 5,7,9,\dots; \\ [c_j f_{a_k} (4n+j-1)] &= 0,9840 \text{ при } j = 3,4,5,\dots \text{ и } k = 6,8,10,\dots.\end{aligned}$$

Остальные коэффициенты этого вида уравнений примем равными нулю. Опустив ряд преобразований, запишем выражение для определения суммарного влияния уравнений горизонта и весовой функции на обратный вес дирекционного угла связующей стороны

$$\frac{1}{P_5} = \sum_{j=1}^J \frac{[c_j f_{a_k} (4n+j-1)]^2}{[c_j c_j (4n+j-1)]} = 0,0036 k^2 + 0,1890 k - 0,1690. \quad (11)$$

Условные уравнения дирекционных углов и координат образуют с весовой функцией такие неквадратичные коэффициенты:

для нечетных k

$$\begin{cases} [df_{a_k} (4n+N)] = 0,1480 k + 0,1940; \\ [ef_{a_k} (4n+N+1)] = \frac{0,2k - 0,22N - 0,26}{N+1,8}; \end{cases}$$

для четных k

$$\begin{cases} [df_{a_k} (4n+N)] = 0,1540 k + 0,1730; \\ [ef_{a_k} (4n+N+1)] = \frac{0,2k - 0,13N - 0,1}{N+1,8}; \end{cases}$$

для последней связующей стороны ряда

$$[df_{a_k} (4n+N)] = -0,0019 k^2 + 0,1707 k + 0,2409$$

$$[g f_{a_k} (4n + N + 2)] = 0,048 (k^2 - 2Nk - k - N).$$

Следовательно, после некоторых преобразований с достаточной точностью получим выражения для определения влияния уравнений дирекционных углов и координат на обратный вес: для нечетных k

$$\frac{1}{P_6} = \frac{(0,274 k + 0,358)^2}{N + 1,8};$$

для четных k

$$\frac{1}{P_6} = \frac{(0,285 k + 0,320)^2}{N + 1,8}; \quad (12)$$

для последнего значения k

$$\frac{1}{P_6} = \frac{(-0,0035 k^2 + 0,315 k + 0,445)^2}{N + 1,8};$$

для нечетных k

$$\frac{1}{P_7} = \frac{(0,45 k - 0,5 N - 0,58)^2}{N^3 + 3,85 N^2 + 4,15 N + 0,8}; \quad (13)$$

для четных k

$$\frac{1}{P_7} = \frac{(0,45 k - 0,29 N - 0,22)^2}{N^3 + 3,85 N^2 + 4,15 N + 0,8}$$

$$\text{и } \frac{1}{P_8} = \frac{(k^2 - 2Nk - k - N)^2}{8,7 (2N + 1)(N^2 + N + 6)}. \quad (14)$$

Следует заметить, что влиянием уравнения ординат (3) на величину обратного веса функции дирекционного угла можно пренебречь, погрешность при этом не превышает 1...2% величины обратного веса для всех связующих сторон ряда, кроме первой и последней стороны, где ошибка не больше 10...15%.

Подставляя соответственно найденные значения в выражение (5), без учета значений $\frac{1}{P_7}$, и преобразовывая их, получаем приближенные формулы для определения обратного веса функции дирекционного угла связующей стороны ряда, расположенного между исходными пунктами:

для нечетных k

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{f_{a_k}}} &= 0,0036 [k(56,4 - k) + 32,5] - \frac{(0,274 k + 0,358)^2}{N + 1,8} - \\ &- \frac{(k^2 - 2Nk - k - N)^2}{8,7 (2N + 1)(N^2 + N + 6)}; \end{aligned}$$

для четных k

$$\frac{1}{P_{f_{\alpha_k}}} = 0,0036 [k(55,6 - k) + 45,3] - \frac{(0,285k + 0,320)^2}{N + 1,8} - \frac{(k^2 - 2Nk - k - N)^2}{8,7(2N + 1)(N^2 + N + 6)};$$

для последней связующей стороны ряда

$$\frac{1}{P_{f_{\alpha_k}}} = 0,0036 [k(55,6 - k) + 45,3] - \frac{(-0,0035k^2 + 0,315k + 0,445)^2}{N + 1,8} - \frac{(k^2 - 2Nk - k - N)^2}{8,7(2N + 1)(N^2 + N + 6)}.$$

О точности полученных формул (15) свидетельствует таблица, в которой приведены значения обратных весов функций дирекционных углов связующих сторон, полученных путем строгого

Значения обратных весов дирекционных углов

k	4			5			6		
	По схеме Гаусса	По формуле	Погрешность, %	По схеме Гаусса	По формуле	Погрешность, %	По схеме Гаусса	По формуле	Погрешность, %
Ряд линейно-угловой триангуляции между исходными пунктами									
1	0,177	0,176	0,6	0,192	0,192	0	0,205	0,205	0
2	0,261	0,254	2,7	0,284	0,279	1,8	0,304	0,303	0,3
3	0,258	0,216	16,3	0,285	0,245	14,0	0,313	0,277	11,5
4	0,257	0,255	0,8	0,281	0,277	1,4	0,308	0,308	0
5	0,257	0,244	5,1	0,273	0,247	9,5	0,297	0,269	9,4
6	0,258	0,285	10,5	0,273	0,272	0,4	0,290	0,282	2,8
7	0,261	0,310	18,8	0,281	0,284	1,1	0,290	0,274	5,5
8	0,177	0,168	5,1	0,285	0,296	3,9	0,297	0,277	6,7
9				0,284	0,326	14,8	0,308	0,306	0,6
10				0,192	0,192	0	0,313	0,278	11,2
11							0,304	0,313	3,0
12							0,205	0,212	3,4

Ряд линейно-угловой триангуляции между дирекционными углами

1	0,336	0,339	0,9	0,342	0,346	1,2	0,347	0,351	1,2
2	0,458	0,453	1,1	0,478	0,473	1,0	0,493	0,489	0,8
3	0,530	0,494	7,8	0,561	0,522	7,0	0,585	0,543	7,2
4	0,560	0,531	5,2	0,613	0,584	4,7	0,653	0,624	4,4
5	0,560	0,543	3,0	0,630	0,608	3,5	0,681	0,656	3,7
6	0,530	0,502	5,3	0,630	0,602	4,4	0,703	0,678	3,6
7	0,458	0,485	5,9	0,613	0,602	1,8	0,703	0,690	1,8
8	0,336	0,366	8,9	0,561	0,530	5,5	0,681	0,653	4,1
9				0,478	0,506	5,9	0,653	0,644	1,4
10				0,342	0,365	6,7	0,585	0,547	6,5
11							0,493	0,518	5,1
12							0,347	0,362	4,3

го решения задачи на ЭВМ (из решения схемы Гаусса) и по формулам (15). При решении примеров мы принимали, что число центральных систем в ряде $N=4, 5, 6$.

Для сравнения в таблице помещены значения обратных весов функций дирекционных углов связующих сторон ряда аналогичного построения, только расположенного между исходными дирекционными углами. Значения обратных весов также получены из решения схемы Гаусса и вычислены по формулам, предложенным ранее автором (см. сноску в данной статье).

На основании данных таблицы можно сделать следующие выводы:

Обратный вес дирекционного угла связующих сторон в ряде, построенном между исходными пунктами, примерно в два раза меньше, чем в аналогичном ряде, проложенном между исходными дирекционными углами.

Связующие стороны с наибольшим обратным весом находятся между серединой ряда и жесткими пунктами.

Изменение значений обратного веса дирекционного угла связующей стороны в рассматриваемом ряде между начальной и конечной сторонами находится в небольших пределах (порядка 8%). В ряде между дирекционными углами эти значения изменяются в пределах порядка 45%.

Как видно из таблицы, погрешности в определении весов по формулам (15) невелики и этими формулами вполне можно пользоваться при оценке точности проектируемых сетей указанного вида.

Список литературы: 1. Лозинский В. В. Ошибки дирекционного угла связующих сторон рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 2. Лозинский В. В. Продольный сдвиг линейно-углового ряда из центральных систем. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 3. Лозинский В. В. Поперечный сдвиг линейно-углового ряда из центральных систем. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30. 4. Монин И. Ф. Предвычисление точности рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 24.

Работа поступила в редакцию 15 октября 1979 года.

УДК 528.28

Д. И. МАСЛИЧ, Л. С. ХИЖАК

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ ПО ИЗМЕРЕННЫМ МЕТЕОЭЛЕМЕНТАМ И ЗЕНИТНЫМ РАССТОЯНИЯМ

Существует много классических методов, позволяющих найти астрономическую рефракцию по измеренным метеоэлементам с определенной точностью [2]. Однако все эти методы