УДК 528.33.35

В. В. ЛОЗИНСКИЙ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ДВОЙНОГО ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО СВОБОДНОГО РЯДА С ИЗМЕРЕННЫМИ СВЯЗУЮЩИМИ СТОРОНАМИ И ДИАГОНАЛЬЮ

В последнее время в связи с возросшими требованиями к геодезическим работам различных отраслей народного хозяйства создание геодезического обоснования выполняется не только методом триангуляции, но и методами трилатерации и линейно-угловой триангуляции. Поэтому вопросы оценки точности элементов таких сложных сетей, как специальные триангуляции на гидротехнических площадках, крупных промышленных площадках, геодинамических полигонах и т. п. всегда были и остаются актуальными.

В работах [1—4] предложены формулы для расчета обратных весов дирекционных углов связующих сторон, а также продольного и поперечного сдвигов двойного линейно-углового свободного ряда, образованного равносторонними треугольниками со всеми измеренными сторонами и углами.

Цель настоящей работы — получить формулы для подсчета обратных весов этих же элементов ряда аналогичного построения, в котором измеряются все углы, связующие стороны и диагональ.

Так как вывод формул аналогичен выводу формул, приведенных в работах [1—3], виды условных уравнений, весовых функций, обозначения и т. д. остаются без изменений, то запишем окончательные выражения для подсчета обратных весов:

1) дирекционных углов

$$\frac{1}{P_\alpha} = 0{,}4963\,N + 0{,}6183; \qquad (1)$$

2) продольного сдвига

$$\frac{1}{P_t} = (0{,}2723\,N + 0{,}3506)\,S^2; \qquad (2)$$

3) поперечного сдвига

$$\frac{1}{P_u} = (0{,}1666\,N^3 + 0{,}5525\,N^2 + 0{,}604\,N + 0{,}4999)\,S^2, \qquad (3)$$

где N — число центральных систем в ряде, S — длина стороны треугольника.

С целью проверки полученных формул были определены обратные веса перечисленных элементов путем строгого решения

задачи на ЭВМ. Результаты вычисления обратных весов по формулам (1—3) и по схеме Гаусса приведены в таблице.

Как видно из таблицы, формулы (1)—(3) позволяют вычислять обратные веса с погрешностью, не превышающей 0,5%, и вполне могут быть использованы для оценки точности проектируемых сетей указанного построения.

Значения обратных весов

N	дирекционных углов			продольного сдвига			поперечного сдвига		
	по схеме Гаусса	по формуле (1)	погрешность %	по схеме Гаусса	по формуле (2)	погрешность, %	по схеме Гаусса	по формуле (3)	погрешность, %
1	1,115	1,115	0	0,623	0,623	0	1,823	1,823	0,
2	1,618	1,611	0,43	0,896	0,895	0,11	5,251	5,251	0,
3	2,108	2,107	0,05	1,168	1,168	0	11,784	11,783	0,01
4	2,604	2,604	0	1,440	1,440	0	22,422	22,418	0,02
5	3,103	3,100	0,10	1,713	1,712	0,06	38,163	38,157	0,02
6	3,603	3,596	0,19	1,985	1,984	0,05	60,008	60,000	0,01

Список литературы: 1. *Лозинский В. В.* Ошибка дирекционного угла связующих сторон рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 2. *Лозинский В. В.* Продольный сдвиг линейно-углового ряда из центральных систем. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979. вып. 29. 3. *Лозинский В. В.* Поперечный сдвиг линейно-углового ряда из центральных систем. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30. 4. *Монин И. Ф.* Предвычисление точности рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 24.

Статья поступила 21 марта 1980 г.

УДК 528.33.35

В. В. ЛОЗИНСКИЙ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ДВОЙНОГО ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА, ПРОЛОЖЕННОГО МЕЖДУ ИСХОДНЫМИ ПУНКТАМИ

Вопросы распределения погрешностей в линейно-угловых рядах всегда представляли определенный интерес для геодезистов. Поэтому в настоящей статье выводятся формулы для подсчета обратных весов продольного и поперечного сдвигов диагонали двойного линейно-углового ряда, построенного из равносторонних треугольников и уравненного по методу условных измерений за условия фигур, сторон, горизонтов, дирекционных углов и координат. Предполагается, что в таком ряде измерены все углы и все стороны.

Виды условных уравнений (возникающих при уравнивании) фигур, сторон, горизонта и дирекционных углов приведены в работах [1—5], а условные уравнения координат имеют вид

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{(b_i)}{b_i}\right)(-1)^i + \frac{1}{2}\left[n(2) - (n-1)(5) + (n-2)(8) - \ldots\right] + $$
$$+ w_x = 0; \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{(b_i)}{b_i}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[(2) + (8) + (14) + \cdots + (3n-1)\right] + $$
$$+ w_y = 0, \tag{2}$$

где n — число треугольников в верхнем ряду.

Для вывода формул воспользуемся известной формулой для обратного веса функции уравненных элементов

$$\frac{1}{P_f} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \frac{[cf\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]} - \cdots,$$

которую запишем в следующем виде:

$$\frac{1}{P_f} = [ff] - \left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \cdots\right), \tag{3}$$

где $\frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{P_3}, \ldots$ — значения величин, вносимых условными уравнениями сторон, горизонта, дирекционных углов и координат в обратный вес функции.

Не останавливаясь на детальном выводе формул, как это делалось в работах [1—4], приведем лишь окончательные значения величин, необходимых для определения обратного веса по формуле (3).

Продольный сдвиг. Квадратичный коэффициент для весовой функции длины диагонали k-го пункта ряда имеет значение

$$[f_{t_k} f_{t_k}] = (k - 0.25)\, S^2. \tag{4}$$

Суммарное влияние условных уравнений сторон первого вида и весовой функции для верхнего ряда треугольников на обратный вес функции определяется выражением

$$\frac{1}{P_1} = (0{,}4688\, k - 0{,}225)\, S^2, \tag{5}$$

а для нижнего ряда треугольников

$$\frac{1}{P_2} = (0{,}0614\, k - 0{,}0178)\, S^2, \tag{6}$$

где S — длина стороны треугольника.

Влияние синусных условных уравнений второго вида на обратный вес для верхнего ряда треугольников выразится следующим образом:

$$\frac{1}{P_3} = (0{,}112\, k + 0{,}053)\, S^2, \tag{7}$$

и для нижнего ряда треугольников

$$\frac{1}{P_4} = (0{,}0593\, k - 0{,}014)\, S^2. \tag{8}$$

Суммарное влияние условных уравнений горизонта и весовой функции на обратный вес будет

$$\frac{1}{P_5} = (0{,}1322\, k - 0{,}1)\, S^2, \tag{9}$$

а влияние уравнения дирекционных углов можно представить в виде

$$\frac{1}{P_6} = \frac{0{,}05}{0{,}5\, N + 1}\, S^2, \tag{10}$$

где N — число центральных систем в ряду.

Запишем выражения для определения влияния условных уравнений на обратный вес продольного сдвига: для условного уравнения абсцисс

$$\frac{1}{P_7} = \frac{(Nk + k + 10\,N - k^2)^2}{355\,(2N + 1)\,(N^2 + N + 6)}\, S^2; \tag{11}$$

для условного уравнения ординат

$$\frac{1}{P_8} = \frac{(0{,}19\, Nk + 0{,}0625\, N + 0{,}38\, k - 0{,}251)^2}{(0{,}5\, N + 1)^2\,(N + 0{,}26)}\, S^2. \tag{12}$$

Обратный вес функции длины диагонали, с учетом значений величин (4)—(12), выразится следующей формулой:

$$\frac{1}{P_{f_t}} = \left[0{,}166\, k + 0{,}054 - \frac{(0{,}19\, Nk + 0{,}0625\, N + 0{,}38\, k - 0{,}251)^2}{(0{,}5\, N + 1)^2\,(N + 0{,}26)} - \right.$$
$$\left. - \frac{0{,}053}{0{,}5\, N + 1} - \frac{(Nk + k + 10\, N - k^2)^2}{355\,(2N + 1)\,(N^2 + N + 6)}\right] S^2. \tag{13}$$

Следует заметить, что при $N \geqslant 6$ без существенной потери точности можно пренебречь четвертым и пятым членами в формуле (13), т. е. влияние условных уравнений дирекционных углов и абсцисс на величину обратного веса продольного сдвига незначительно.

Поперечный сдвиг. Выражение для определения квадратичного коэффициента для весовой функции направления диагонали имеет вид

$$[f_{u_k} f_{u_k}] = \left[0{,}75\,(2k-1) + \frac{1}{18}\,k\,(2k-1)(4k-1)\right] S^2. \qquad (14)$$

Приведем значения величин, вносимых условными уравнениями в обратный вес:
синусными условными уравнениями первого вида для верхнего ряда треугольников

$$\frac{1}{P_1} = (0{,}0833\,k^3 + 0{,}3876\,k^2 - 0{,}0645\,k - 0{,}075)\,S^2; \qquad (15)$$

для нижнего ряда треугольников

$$\frac{1}{P_2} = (0{,}0068\,k^3 + 0{,}0685\,k^2 - 0{,}0547\,k - 0{,}006)\,S^2; \qquad (16)$$

условными уравнениями сторон второго вида для верхнего ряда треугольников

$$\frac{1}{P_3} = (0{,}0825\,k^3 - 0{,}577\,k^2 + 1{,}387\,k - 0{,}6632)\,S^2; \qquad (17)$$

для нижнего ряда треугольников

$$\frac{1}{P_4} = (0{,}0135\,k^3 + 0{,}0027\,k^2 - 0{,}0143\,k + 0{,}0036)\,S^2; \qquad (18)$$

условными уравнениями горизонта

$$\frac{1}{P_5} = (0{,}1631\,k^3 - 0{,}3555\,k^2 + 0{,}2779\,k - 0{,}0733)\,S^2; \qquad (19)$$

условным уравнением дирекционных углов

$$\frac{1}{P_6} = \frac{(0{,}1903\,k^2 + 0{,}1818\,k - 0{,}0347)^2}{0{,}5\,N + 1}\,S^2; \qquad (20)$$

условным уравнением абсцисс

$$\frac{1}{P_7} = \frac{0{,}13\,[1{,}561\,k\,(k+0{,}81)\,(N+0{,}79) - k^3 + 19]^2}{(2N+1)(N^2+N+6)}\,S^2; \qquad (21)$$

условным уравнением ординат

$$\frac{1}{P_8} = \frac{0{,}0003\,[3Nk - 2N + 3k\,(1-k)]^2}{N + 0{,}26}\,S^2. \qquad (22)$$

Так как суммарное влияние уравнений ординат и весовой функции на обратный вес функции поперечного сдвига незначительно, то с учетом этого и значений (14)—(21) имеем

$$\frac{1}{P_{f_u}} = \Big\{0{,}095\,k^3 + 0{,}140\,k^2 + 0{,}024\,k + 0{,}064 - \frac{(0{,}1903\,k^2 + 0{,}1818\,k - 0{,}0347)^2}{0{,}5\,N + 1} - \frac{0{,}13\,[1{,}561\,k\,(k+0{,}81)\,(N+0{,}79) - k^3 + 1]^2}{(2N+1)(N^2+N+6)}\Big\}\,S^2. \qquad (23)$$

Полученные формулы (13), (23) для подсчета обратных весов продольного и поперечного сдвигов диагонали ряда были

Таблица 1

Значения обратных весов функций продольного сдвига

k	Наименование действий	N = 1	2	3	4	5	6
1	По схеме Гаусса	0,103	0,124	0,137	0,147	0,155	0,161
	По формуле (13)	0,120	0,127	0,136	0,145	0,153	0,160
	Погрешность, %	16,5	2,4	0.7	1,4	1,3	0,6
2	По схеме Гаусса		0,124	0,171	0,204	0,227	0,245
	По формуле (13)		0,122	0,173	0,207	0,232	0,251
	Погрешность, %		1,6	1,2	1,5	2,2	2,4
3	По схеме Гаусса			0,137	0,204	0,254	0,292
	По формуле (13)			0,126	0,204	0,257	0,297
	Погрешность, %			8,0	0	1,2	1,7
4	По схеме Гаусса				0,147	0,227	0,292
	По формуле (13)				0,135	0,229	0,298
	Погрешность, %				8,2	0,9	2,0
5	По схеме Гаусса					0,155	0,245
	По формуле (13)					0,148	0,253
	Погрешность, %					4,5	3,3
6	По схеме Гаусса						0,161
	По формуле (13)						0,164
	Погрешность, %						1,9

проверены путем сравнения сдвигов вычисленных по этим формулам и определенных на ЭВМ (из решения нормальных уравнений по схеме Гаусса). Результаты проверки приведены в табл. 1 и 2.

Анализ предлагаемых в этой статье формул (13), (23) и данных табл. 1, 2 приводит к следующим выводам:

1. Данные формулы позволяют достаточно быстро и обоснованно решать вопросы о точности не только конечного пункта диагонали ряда относительно начального, но и любого промежуточного пункта относительно соседнего.

2. В середине ряда между твердыми пунктами как продольный сдвиг, так и поперечный имеют наибольшее значение.

3. Для рядов с количеством центральных систем более пяти на продольный сдвиг практически не влияют условия дирекционных углов и абсцисс, а на поперечный сдвиг — условия ординат.

Таблица 2

Значения обратных весов функций поперечного сдвига

k	Наименование действий	N = 1	2	3	4	5	6
1	По схеме Гаусса	0,114	0,151	0,178	0,198	0,214	0,228
	По формуле (23)	0,109	0.131	0,160	0,183	0,203	0,218
	Погрешность, %	4,4	13,2	10,1	7,6	5,1	4,4
2	По схеме Гаусса		0,151	0,267	0,374	0,469	0,550
	По формуле (23)		0,176	0,246	0,335	0,462	0,559
	Погрешность, %		16,6	7,9	5,1	1,5	1,6
3	По схеме Гаусса			0,178	0,374	0,590	0,831
	По формуле (23)			0,197	0,349	0,587	0,839
	Погрешность, %			10,7	6,7	0,5	1,0
4	По схеме Гаусса				0,198	0,469	0,831
	По формуле (23)				0,192	0,452	0,850
	Погрешность, %				3,0	3,6	2,3
5	По схеме Гаусса					0,214	0,550
	По формуле (23)					0,194	0,584
	Погрешность, %					9,4	6,2
6	По схеме Гаусса						0,228
	По формуле (23)						0,230
	Погрешность, %						0,9

4. Приведенными формулами вполне можно пользоваться при оценке точности проектируемых сетей указанного вида при различном числе центральных систем в ряде.

Список литературы: 1. *Лозинский В. В.* Ошибка дирекционного угла связующих сторон рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 2. *Лозинский В. В.* Продольный сдвиг линейно-углового ряда из центральных систем. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 3. *Лозинский В. В.* Поперечный сдвиг линейно-углового ряда из центральных систем. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30. 4. *Лозинский В. В.* Точность дирекционного угла связующих сторон ряда из центральных систем линейно-угловой триангуляции, проложенного между сторонами с исходными дирекционными углами. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 31. 5. *Монин И. Ф.* Предвычисление точности рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 24.

Статья поступила 21 марта 1980 г.

УДК 528.33

М. И. МАРЫЧ, И. Н. ГУДЗ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ВЫСОТ КВАЗИГЕОИДА И УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА В ГОРНОМ РАЙОНЕ

Известно, что вычисления высот квазигеоида и уклонений отвеса в горном районе по формулам Стокса и Венинг-Мейнеса не обеспечивают достаточной точности. Точные результаты этих величин можно получить на основании строгой теории фигуры Земли Молоденского. В данной работе сделана попытка определить порядок величин первых поправок Молоденского к стоксову приближению высот квазигеоида и уклонений отвеса в горном районе Международного геодезического полигона.

Исследования формул Молоденского [4, 5] показали, что его первые поправки в высоты квазигеоида ζ_1 и уклонения отвеса ξ_1 и η_1, получаемые за влияние основной части измеренных аномалий силы тяжести Δg, представляющей собой редукцию Буге — $2\pi f\delta H$ (т. е. $\Delta g = -2\pi f\delta H$), определяются формулами Стокса и Венинг-Мейнеса, если в них вместо аномалии силы тяжести будут использованы поправки за рельеф. Таким образом, для вычисления первых поправок высот квазигеоида и уклонений отвеса получены следующие формулы:

$$\zeta_1' = \frac{R}{4\pi\gamma}\int \delta g_p\, S(\Psi)\, d\sigma; \quad (1) \qquad \begin{Bmatrix}\xi_1\\ \eta_1\end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma}\int \delta g_p \frac{\partial S(\Psi)}{\partial \Psi}\begin{Bmatrix}\cos A\\ \sin A\end{Bmatrix} d\sigma. \quad (2)$$

Более строгие аналитические преобразования формул Молоденского для первой поправки T_1 возмущающего потенциала, выполненные в работе [1], приводят к результату

$$T_1 = \frac{R}{4\pi}\int \delta g_p\, S(\Psi)\, d\sigma - \pi f\delta H^2. \qquad (3)$$

Первые поправки уклонения отвеса, полученные на основании формулы (3), совпадают с (2), так как входящий в выражение (3) неинтегральный член $\pi f\delta H^2$ не влияет на уклонение отвеса. Покажем это, для чего запишем выражения гравиметрических уклонений отвеса:

$$\xi = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\rho\partial B}; \quad \eta = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\cos\rho B\partial L}. \qquad (4)$$