Наиболее оптимальным аналитическим выражением для ап-проксимации эмпирической ковариационной функции являетс[я] экспоненциальная функция вида (5).

Список литературы: 1. *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1971. 2. *Лебедев С. В.* и др. Корреляционный анализ силы тяжести / Отчет НИР МИИГАиК. Рег. № 75038768. — М.: МИИГАиК, 1975. 3. *Розанов Ю. А.* Случайные процессы. — М.: Наука, 1971. 4. *Ferrari A.* Lunar gravity: a harmonic analysis. — J. Geophys. Res. 1977, v. 82, N 20. 5. *Heiskanen W. A., Moritz H.* Physical Geodesy. Freeman. — San Francisco, 1967. 6. *Kaula W. H.* Theory of statistical analysis of data distributed over a sphere. — Rev. Geophys., 1967, v. 5. 7. *Kryński J., Schwarz K.* Analysis of Satellite gradiometry data for local geoid determination. — Mitt. geod. Inst. Techn. Univ. Craaz., 1977, N 26. 8. *Moritz H.* Least-squares collocation. — Veröff. Dtsch. Geod. Kominis. Bayer. Akad. Wiss., 1973, N A75. 9. *Moritz H.* Covariance functions in least-square collocation. — OSU. Report, 1976, N 240. 10. *Noë H.* Program to estimate gravity anomalies from a given set of gravity values. — Mitt. geod. Inst. Techn. Univer. Cranz., 1977, N 26. 11. *Rapp R. H.* Potential coefficient determinations from 5° terrestrial gravity data. — OSU. Report, 1977, N 251. 12. Smithsonian Standart Earth (III). SAO, Cambridge, Massachusetts, 1973. 13. *Williamson M. R.* Revised estimation of 550×550 km. mean gravity anomalies. — Special Report Smithsonian Astrophys. Observ. 1977, N 377.

Работа поступила в редколлегию 25 сентября 1979 года

УДК 523.3/8

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, В. В. КИРИЧУК, М. М. ФЫС

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ И КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНА ПРИ ТОЧЕЧНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Многие задачи прикладной математики и геодезии сводятся к построению многочлена $Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, где коэффициенты a_i определяются из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n; \\ y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_0 + a_1 x_m + \cdots + a_n x_m^n, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

в которой, как правило, величины y_i $(i=0, 1, \ldots, m)$ получены по результатам измерений или наблюдений.

Вводя матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \cdots x_0^n \\ 1 & x_1 \cdots x_1^n \\ \cdots & \cdots\cdots \\ 1 & x_m \cdots x_m^n \end{pmatrix}; \; a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

перепишем систему уравнений (1) в матричном виде

$$Y = Ca. \tag{1a}$$

При $n=m$ построенный многочлен $Q_n(x)$ есть полином Лагранжа [2]. Если значения y_i получены из измерений, сопровождающихся ошибками, систему (1) следует решать под условием наименьших квадратов. При $m>n$ решение задачи вообще имеет смысл только при некотором дополнительном условии, например с использованием принципа наименьших квадратов.

Учитывая наличие ошибок в величинах y_i, вместо (1) запишем

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n - y_0 = v_0; \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n - y_1 = v_1; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_m + \cdots + a_n x_m^n - y_m = v_m, \end{array}\right\} \tag{2}$$

где v_j — остаточные отклонения в указанных уравнениях связи (1). Будем искать полином $Q_n(x)$ под условием

$$\sum_{i=0}^{m} v_i^2 = [vv] = \min. \tag{3}$$

Тогда его коэффициенты a_i — суть элементы матрицы

$$a = (C^T C)^{-1} C^T Y, \tag{4}$$

где

$$(C^T C) = \left\{\begin{array}{llll} m+1 & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^n \\ \sum\limits_{i=0}^{m} x_i & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^2 & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^n & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{n+1} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{2n} \end{array}\right\}, \tag{5}$$

Пусть для удобства записей

$$B = (C^T C)^{-1}, \tag{6}$$

причем $B = (b_{kt})$ — квадратная матрица порядка $n+1$.

Схема решения системы (2) под условием (3) дана в работах [2, 4], где отмечено, однако, что она обычно приводит к решению системы с плохо обусловленной матрицей или с матрицей с большими численными значениями элементов, особенно при высоких степенях многочлена $Q_n(x)$. Поэтому во избежание отмеченных трудностей будем искать элементы обратной матрицы в замкнутом виде, что позволит просто определить коэффициенты аппроксимирующего многочлена через x_i, y_i.

Рассмотрим сначала случай $m=n$. Найдем элементы матрицы (6). Вычислим определитель матрицы (5). Имеем

$$|C^T C| = |C^T||C| = \prod_{i \neq j}^{n} (x_j - x_i)^2, \tag{7}$$

так как C^T, C — квадратные и $|C|$ — определитель Вандермонда.

Найдем минор матрицы (5) M_{11}. Нетрудно убедиться, что

$$M_{11} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{n} \sigma^2_{i_1, i_2, \ldots, i_n; n} \sum_{\substack{i = i_1, \ldots, i_n \\ j = i_1, \ldots, i_n}}^{i \neq j} (x_i - x_j)^2,$$

где $\sigma_{i_1, i_2, \ldots, i_n; n} = x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ — элементарный симметричный многочлен степени n, который в общем случае имеет вид *

$$\sigma_{i_1, \ldots, i_n; s} = x_{i_1} \cdots x_{i_s} + \cdots + x_{i_{i_1}} \cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} + \cdots$$

Заметим, что $\sigma_{i_1, \ldots, i_n; 0} = 1$.
Аналогично, расскрывая миноры M_{kk}, а затем M_{kt}, получаем

$$M_{kk} = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{n} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-k} \prod_{\substack{i = i_1, \ldots, i_n \\ j = i_1, \ldots, i_n}}^{i \neq j} (x_i - x_j)^2;$$

$$M_{kt} = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{n} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-k} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-t} \prod_{\substack{i = i_1, \ldots, i_n \\ j = i_1, \ldots, i_n}}^{i \neq j} (x_i - x_j)^2. \tag{8}$$

Из определения обратной матрицы и с учетом симметричности матрицы (6) имеем

$$b_{kt} = \frac{(-1)^{k+1} \sum\limits_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{n} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-k} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-t} \prod\limits_{\substack{i = i_1, \ldots, i_n \\ j = i_1, \ldots, i_n}}^{i \neq j} (x_i - x_j)^2}{\prod\limits_{i \neq 1}^{n} (x_i - x_j)^2}.$$

А после упрощений получаем окончательно

$$b_{kt} = (-1)^{k+t} \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{n} \frac{\sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-k} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-t}}{\prod\limits_{\substack{i = i_1, \ldots, i_n \\ j = i_1, \ldots, i_n}}^{i \neq j} (x_i - x_j)^2} — \tag{9}$$

элементы обратной матрицы (6).

---

* Построение симметрических многочленов приведено ниже в качестве примера.

Будем теперь считать, что $m > n$. Найдем для этого случая определитель $|C^T C|$. Представляя последний в виде суммы определителей и пользуясь известными их свойствами, получим

$$|C^T C| = \sum_{i_1,\dots,i_{n+1}=0}^{m} \begin{vmatrix} 1 & x_{i_1} & \cdots & x_{i_1}^{n}; \\ x_{i_2} & x_{i_2}^{2} & \cdots & x_{i_2}^{n+1}; \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_{n+1}}^{n} & x_{i_{n+1}}^{n+1} & \cdots & x_{i_{n+1}}^{2n}. \end{vmatrix}.$$

Сгруппировав подобные члены, найдем

$$|C^T C| = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n+1}=0 \\ i_1<i_2<\dots<i_{n+1}}}^{m} \prod_{\substack{i=i_1,\dots,i_{n+1} \\ j=i_1,\dots,i_{n+1}}}^{i\neq j} (x_i - x_j)^2. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что из этой формулы при $m=n$ следует уравнение (7), так как при суммировании в (10) будет только одна комбинация различных индексов, например $i_1=0$, $i_2=1$, ..., $i_{n+1}=n$.

Теперь вместо формулы (9) имеем

$$b_{lt} = \frac{(-1)^{l+t} \sum\limits_{i_1,\dots,i_n=0}^{m} \sigma_{i_1,\dots,i_n;\,n-l}\,\sigma_{i_1,\dots,i_n;\,n-t} \prod\limits_{\substack{i=i_1,\dots,i_n \\ j=i_1,\dots,i_n}}^{i\neq j} (x_i - x_j)^2}{\sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{n+1}=0 \\ i_1<i_2<\dots<i_{n+1}}}^{m} \prod\limits_{\substack{i=i_1,\dots,i_{n+1} \\ j=i_1,\dots,i_{n+1}}}^{i\neq j} (x_i - x_j)^2}. \tag{11}$$

Наконец, объединяя все распределения имеем окончательное решение задачи

$$a_l = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n+1} (-1)^{l+t} \sum\limits_{i_1,\dots,i_n=0}^{m} \sigma_{i_1,\dots,i_n;\,n-l}\,\sigma_{i_1,\dots,i_n;\,n-t} \prod\limits_{\substack{i=i_1,\dots,i_n \\ j=i_1,\dots,i_n}}^{i\neq j} (x_i - x_j)^2}{\sum\limits_{\substack{i_1,\dots,i_{n+1}=0 \\ i_1<i_2<\dots<i_{n+1}}}^{m} \prod\limits_{\substack{i=i_1,\dots,i_{n+1} \\ j=i_1,\dots,i_{n+1}}}^{i\neq j} (x_i - x_j)^2} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} x_i^k y_i.$$

Последняя формула легко программируется на цифровой ЭВМ. Для иллюстрации рассмотрим пример, раскрывающий особенности данного метода.

Пусть требуется найти коэффициенты квадратичной функции $y=a_0+a_1x+a_2x^2$, значения y_i которой при x_i приведены ниже:

x	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	2	3	5

Найдем $(C^TC)^{-1}$, используя (10)

$$|C^T C| = [(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)]^2 + [(x_1-x_2)(x_1-x_4)\times \times (x_2-x_4)]^2 + [(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)]^2 + + [(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_3-x_4)]^2 = 8\cdot 10^{-5}.$$

Определим элементы обратной матрицы (6)

$$b_{11} = \frac{1}{8\cdot 10^{-5}}\{\sigma^2_{1,2;2}(x_1-x_2)^2 + \sigma^2_{1,3;2}(x_1-x_3)^2 + \sigma^2_{2,4;2}(x_2-x_4)^2 + + \sigma^2_{1,4;2}(x_1-x_4)^2 + \sigma^2_{2,3;2}(x_2-x_3)^2 + \sigma^2_{3,4;2}(x_3-x_4)^2\} = 7{,}75,$$

где

$$\sigma_{i,j;2} = x_i x_j;\ b_{12} = \frac{-1}{8\cdot 10^{-5}}\{\sigma_{1,2;2}\sigma_{1,2;1}(x_1-x_2)^2 + + \sigma_{1,3;2}\sigma_{1,3;1}(x_1-x_3)^2 + \sigma_{1,4;2}\sigma_{1,4;1}(x_1-x_4)^2 + \sigma_{2,3;2}\sigma_{2,3;1}(x_2-x_3)^2 + + \sigma_{2,4;2}\sigma_{2,4;1}(x_2-x_4)^2 + \sigma_{3,4;2}\sigma_{3,4;1}(x_3-x_4)^2\} = -6{,}75.$$

Здесь

$$\sigma_{i,j;1} = x_i + x_j;\ b_{13} = \frac{1}{8\cdot 10^{-5}}\{\sigma_{1,2;2}\sigma_{1,2;0}(x_1-x_2)^2 + + \sigma_{1,3;2}\sigma_{1,3;0}(x_1-x_3)^2 + \sigma_{1,4;2}\sigma_{1,4;0}(x_1-x_4)^2 + \sigma_{2,3;2}\sigma_{2,3;0}(x_2-x_3)^2 + + \sigma_{2,4;2}\sigma_{2,4;0}(x_2-x_4)^2 + \sigma_{3,4;2}\sigma_{3,4;0}(x_3-x_4)^2\} = 125,$$

где $\sigma_{i,j;0}=1$.

Поскольку C^TC — симметрическая матрица, то $b_{21}=b_{21}= =-67{,}5$;

$$b_{22} = \frac{1}{8\cdot 10^{-5}}\{\sigma^2_{1,2;1}(x_1-x_2)^2 + \sigma^2_{1,3;1}(x_1-x_3)^3 + + \sigma^2_{1,4;1}(x_1-x_4)^2 + \sigma^2_{2,3;1}(x_2-x_3)^2 + \sigma^2_{2,4;1}(x_2-x_4)^2 + + \sigma^2_{3,4;1}(x_3-x_4)^2\} = 645;$$

$$b_{23} = \frac{-1}{8\cdot 10^{-5}}\{\sigma_{1,2;1}\sigma_{1,2;0}(x_1-x_2)^2 + \sigma_{1,3;1}\sigma_{1,3;0}(x_1-x_3)^2 + + \sigma_{1,4;1}\sigma_{1,4;0}(x_1-x_4)^2 + \sigma_{2,3;1}\sigma_{2,3;0}(x_2-x_3)^2 + + \sigma_{2,4;1}\sigma_{2,4;0}(x_2-x_4)^2 + \sigma_{3,4;1}\sigma_{3,4;0}(x_3-x_4)^2\} = -1250;$$

$$b_{31} = b_{13} = 125;\quad b_{32} = b_{23} = -1250.$$

Осталось определить

$$b_{33}=\frac{1}{8\cdot10^{-5}}\{\sigma^2_{1,2;0}(x_1-x_2)^2+\sigma^2_{1,3;0}(x_1-x_3)^2+\sigma^2_{1,4;0}(x_1-x_4)^2+$$
$$+\sigma^2_{2,3;0}(x_2-x_3)^2+\sigma^2_{2,4;0}(x_2-x_4)^2+\sigma^2_{3,4;0}(x_3-x_4)^2\}=2500.$$

Таким образом, получаем

$$(C^TC)^{-1}=\begin{pmatrix}7{,}75 & -67{,}5 & 125\\ -67{,}5 & 645 & -1250\\ 125 & -1150 & 2500\end{pmatrix}.$$

Вычисляя теперь обычным образом по формуле (4), имеем $a_0=0{,}75$; $a_1=0{,}5$; $a_2=25$, т. е. $y=0{,}75+0{,}5x+25x^2$.

Результаты данной статьи могут быть использованы при уравнивании геодезических сетей, когда возникают плохо обусловленные системы нормальных уравнений.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. 2. *Демидович Б. А., Марон И. А.* Численные методы анализа. — М.: Наука, 1967. 3. *Демидович Б. А., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. 4. *Хемминг Р. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1972.

Работа поступила в редколлегию 24 января 1980 года.

УДК 528.024.1

Ю. Д. МИРОШНИК

О МЕТОДИКЕ НИВЕЛИРОВАНИЯ I КЛ. В ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ТОННЕЛЯХ

Согласно «Программе развития сети государственного нивелирования I и II классов в предстоящие 10—15 лет», утвержденной Главным управлением геодезии и картографии при Совете Министров СССР 19 июля 1968 г., в значительном объеме проводятся работы по развитию нивелирных сетей I кл.

В соответствии с инструкцией [1] линии нивелирования I кл. прокладывают преимущественно по шоссейным и железным дорогам, вдоль берегов крупных рек. Нивелирование должно выполняться с наибольшей точностью, которая достигается применением самых совершенных нивелиров и методов измерения, предусматривающих наиболее полное исключение систематических погрешностей.

При выполнении работ по прецизионному нивелированию в равнинной местности особых трудностей не возникает, однако в местности со значительным перепадом высот, например в горно-лесистой, производство их существенно осложняется.