МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 10

ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528. 414

В. Н. ГАНЬШИН

РАЦИОНАЛЬНЫЕ СХЕМЫ КОСВЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЙ *

В геодезических построениях, используемых для косвенного определения расстояний, часто применяется четырехугольник с двумя (одной) измеренными сторонами и несколькими измеренными углами, причем искомое расстояние является диагональю четырехугольника.

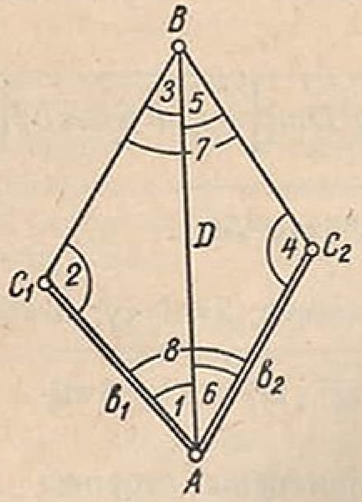

Рис. 1.

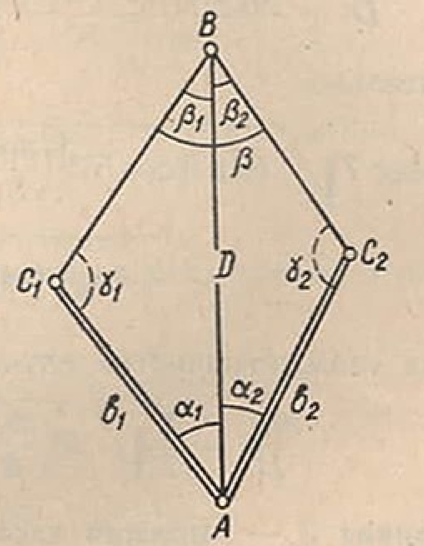

Рис. 2.

Первоначально рассмотрим вопрос о точности определения этой диагонали в зависимости от расположения измеренных углов. Для элементов четырехугольника примем обозначения, приведенные на рис. 1. Среднюю квадратическую ошибку угла i $(i=1, 2,..., 8)$ будем обозначать m_i, а стороны b_v $(v=1, 2)$ — m_{b_v}.

Вариант 1 — «пара треугольников». Пусть измерены длины сторон b_1, b_2 и углы *2, 3, 4, 5*; требуется определить длину D стороны AB и ее среднюю квадратическую ошибку m_D.

Обычно принимают

$$D=\frac{1}{2}(D_1+D_2). \tag{1}$$

---

* Вопрос о необходимости создания наиболее общего вида звена параллактической полигонометрии является дискуссионным, так как можно предложить более сложную конструкцию, для которой звено автора будет частным случаем (прим. редакции).

где

$$D_i = \frac{b_i}{\sin(2i+1)} \sin 2i \quad (i = 1,2),$$

тогда

$$m_D = \frac{1}{2}\sqrt{m_{D_1}^2 + m_{D_2}^2}$$

и

$$\frac{m_{D_i}}{D_i} = \sqrt{\left(\frac{m_{b_i}}{b_i}\right)^2 + \operatorname{ctg}^2 2i \cdot m_{2i}^2 + \operatorname{ctg}^2(2i+1) m_{2i+1}^2}. \qquad (2)$$

Для «симметричного» случая $2 \approx 4 = \gamma$; $3 \approx 5 = \beta$; $b_1 \approx b_2 = b$ имеем

$$\frac{m_D}{D} = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + 2\operatorname{ctg}^2\gamma\, m_\gamma^2 + 2\operatorname{ctg}^2\beta\, m_\beta^2}. \qquad (3)$$

Вариант 2 — «четырехугольник без диагоналей». Пусть измерены стороны b_1, b_2 и углы *2, 4, 7;* требуется определить D и m_D. Из рассмотрения схемы (рис. 1) имеем

$$D^2 = \frac{(b_1 \sin 2)^2 + 2(b_1 \sin 2)(b_2 \sin 4)\cos 7 + (b_2 \sin 4)^2}{\sin^2 7}, \qquad (4)$$

следовательно,

$$\frac{m_D}{D} = \operatorname{cosec} 7 \sqrt{(\sin 3 \cos 5)^2\left[\left(\frac{m_{b_1}}{b_1}\right)^2 + \operatorname{ctg}^2 D m_2^2\right] + (\sin 5 \cos 3)^2\left[\left(\frac{m_{b_2}}{b_2}\right)^2 + \right.} \dots$$

$$\dots \overline{\left. + \operatorname{ctg}^2 4 m_4^2\right] + \cos^2 3 \cos^2 5 m_7^2}. \qquad (5)$$

Для «симметричного» случая $b_1 \approx b_2 \approx b$; $2 \approx 4 = \gamma$; $3 \approx 5 = \beta$ получим

$$\frac{m_D}{D} = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + 2\operatorname{ctg}^2\gamma\, m_\gamma^2 + \operatorname{ctg}^2\beta\, m_\beta^2}. \qquad (6)$$

Вариант 3 — «прямая засечка». Измерены стороны b_1, b_2 и углы *2, 4, 8;* требуется определить D и m_D. Вычислив угол *7* из уравнения

$$7 = 360^\circ - (2 + 4 + 8), \qquad (7)$$

определим затем величину D по формуле (4).

Средняя квадратическая ошибка стороны D будет

$$\frac{m_D}{D} = \operatorname{cosec} 7 \sqrt{(\sin 3 \cos 5)^2\left(\frac{m_{b_1}}{b_1}\right)^2 + (\sin 5 \cos 3)^2\left(\frac{m_{b_2}}{b_2}\right)^2 +} \dots$$

$$\dots \overline{+ (\cos 3 \cos 5)^2 m_8^2 + \left(\frac{\cos 5 \sin 1}{\sin 2}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{\cos 3 \sin 6}{\sin 4}\right)^2 m_4^2}. \qquad (8)$$

Для «симметричного» случая $b_1 \approx b_2 = b$; $2 \approx 4 \approx \gamma$; $1 \approx 6 = \alpha$ имеем

$$\frac{m_D}{D} = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \operatorname{ctg}^2\beta\, m_\beta^2 + 2(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)^2 m_\gamma^2}. \qquad (9)$$

Вариант 4 — «параллактическое звено». Измерены стороны b_1, b_2 и углы *1, 6, 7;* требуется определить D и m_D. Из рассмотрения рис. 1 (применительно к измеренным элементам) найдем

$$D = P + \sqrt{P^2 - Q}, \tag{10}$$

где

$$P = \frac{1}{2}\left[b_1 \frac{\sin(1+7)}{\sin 7} + b_2 \frac{\sin(6+7)}{\sin 7}\right]; \quad Q = b_1 b_2 \frac{\sin(1+6+7)}{\sin 7}.$$

Средняя квадратическая ошибка m_D определится из формулы

$$\frac{m_D}{D} = \frac{1}{\sigma_1+\sigma_2}\sqrt{\left(\sigma_2 \frac{m_{b_1}}{b_1}\right)^2 + \left(\sigma_1 \frac{m_{b_2}}{b_2}\right)^2 + (\sigma_2 \operatorname{ctg} 2m_1)^2 + (\sigma_1 \operatorname{ctg} 4m_6)^2 + \ldots + (\sigma_1\sigma_2 m_7)^2}, \tag{11}$$

где

$$\sigma_1 = \operatorname{ctg} 2 + \operatorname{ctg} 3; \quad \sigma_2 = \operatorname{ctg} 4 + \operatorname{ctg} 5.$$

Для «симметричного» случая $b_1 \approx b_2 = \mathbf{b}$; $1 \approx 6 \approx \alpha$; $2 \approx 4 = \gamma$; $3 \approx 5 = \beta$, имеем

$$\frac{m_D}{D} = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + 2\operatorname{ctg}^2\gamma m_\alpha^2 + (\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma)m_\beta^2}. \tag{12}$$

Применительно к наиболее распространенным условиям

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_8 = m; \quad m_{bi}^2 = \mu^2 \frac{b_i}{1\,м} \ (i = 1, 2),$$

где $\frac{b_i}{1\,м}$ — отвлеченное число, соответствующее значению длины базиса b_i, выраженной в метрах;

μ — коэффициент случайного влияния на 1 *м*.

При этих условиях формулы (3), (6), (9) и (12) примут соответственно следующий вид:

$$\frac{m_D}{D} = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{2}{qb} + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}^2\beta}; \tag{13}$$

$$\frac{m_D}{D} = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{2}{qb} + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}^2\beta}; \tag{14}$$

$$\frac{m_D}{D} = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{2}{qb} + 2(\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta)^2 + \operatorname{ctg}^2\beta}; \tag{15}$$

$$\frac{m_D}{D} = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{2}{qb} + 3\operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}^2\beta}, \tag{16}$$

где

$$\frac{1}{q} = \frac{\mu^2}{m^2}. \tag{17}$$

При определении недоступных расстояний параллактический угол, расположенный против базиса (стороны b_1 и b_2 можно рассматривать как ломаный базис), как правило, будет острым. В этом случае величина $\operatorname{ctg}\gamma$ существенно меньше $\operatorname{ctg}\beta$ и вычисление расстояния D по формулам вариантов 2 и 4 предпочтительнее, чем по формулам вариантов 1 и 3. Поясним это на примере.

Пример. Пусть $3 \approx 5 \approx 30°$; т. е. $\operatorname{ctg}^2\beta = 3$; $2 \approx 4 \approx 90°$, т. е. $\operatorname{ctg}^2\gamma = 0$; $b_1 q \approx b_2 q \approx 1$. Для рассмотренных вариантов найдем:

для пары треугольников

$$\frac{m_D}{D}=\frac{m}{2}\sqrt{2+6}=1,414\,m;$$

для четырехугольника без диагонали

$$\frac{m_D}{D}=\frac{m}{2}\sqrt{2+3}=1,118\,m;$$

для прямой засечки

$$\frac{m_D}{D}=\frac{m}{2}\sqrt{2+9}=1,658\,m;$$

для параллактического звена

$$\frac{m_D}{D}=\frac{m}{2}\sqrt{2+3}=1,118\,m.$$

Таким образом, в отношении точности варианты 2 и 4 действительно имеют существенное преимущество по сравнению с вариантами 1 и особенно 3. Это обстоятельство позволяет несколько расширить сферу применения метода косвенного определения расстояний.

Пусть при данной точности угловых и линейных измерений допускается определение недоступного расстояния из пары треугольников (вариант 1) с углами, расположенными против базисных сторон, не менее 30°. Считая $2\approx 4\approx\gamma=90°$ и $3\approx 5=\beta=30°$, будем иметь (по формуле 13)

$$\frac{m_D}{D}=\frac{m}{2}\sqrt{\frac{2}{qb}+6}\cdot$$

Определим теперь значение угла $\beta=3=5$, которое при использовании формул вариантов 2 и 4 позволит определить сторону D с такой же ошибкой. Так как формулы (14) и (16) в этом случае примут вид

$$\frac{m_D}{D}=\frac{m}{2}\sqrt{\frac{2}{qb}+\operatorname{ctg}^2\beta},$$

то указанная точность будет достигнута при условии $\operatorname{ctg}^2\beta=6$, т. е. $\beta=22°12'5$.

Таким образом, рациональная структура звена (схемы сети) позволяет существенно снизить требования, предъявляемые к величине параллактического угла при определении недоступных расстояний.

Однако применение вариантов 2 и 4 в «чистом» виде имеет свои недостатки. Во-первых, решение по формулам (4) и (10) значительно сложнее, чем по формуле (1), во-вторых, нет контроля. Очевидно, следует дополнительно измерить один или несколько углов и произвести простейшее уравнивание.

Так, измерив не только углы α_1, α_2 и β, но и угол β_1 (рис. 2), можно вычислить все остальные углы:

$$\beta_2=\beta-\beta_1;\ \gamma_1=180°-(\alpha_1+\beta_1);\ \gamma_2=180°-(\alpha_2+\beta_2).$$

Затем подсчитаем невязку δ в стороне D (из двух треугольников):

$$\delta=\frac{b_1}{\sin\beta_1}\sin(\alpha_1+\beta_1)-\frac{b_2}{\sin\beta_2}\cdot\sin(\alpha_2+\beta_2).$$

Поправки Δ в измеренные элементы определятся по формулам

$$\Delta\alpha_1 = -kc_1;\ \Delta\alpha_2 = kc_2;\ \Delta\beta_1 = -k\sigma;\ \Delta\beta = k\delta_2;$$

$$\Delta b_1 = k\cdot\frac{1}{q};\ \ \Delta b_2 = -k\frac{1}{q};\ q = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2,$$

где

$$c_1 = \operatorname{ctg}\gamma_1;\ c_2 = \operatorname{ctg}\gamma_2;$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2;\ \sigma_1 = \operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\gamma_1;\ \sigma_2 = \operatorname{ctg}\beta_2 + \operatorname{ctg}\gamma_2;$$

$$k = -\frac{\delta}{D} : \left[(c_1^2 + c_2^2 + \sigma_2^2 + \sigma^2) + \frac{1}{q}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)\right].$$

Для средней квадратической ошибки m_D из уравнивания имеем

$$\left(\frac{m_D}{D}\right)^2 = \left(a_{ff} - \frac{a_{af}^2}{a_{aa}}\right)m^2,$$

где

$$a_{ff} = \operatorname{ctg}^2\gamma_1 + \sigma_1^2 + \frac{1}{qb_1};\quad a_{af} = \operatorname{ctg}^2\gamma_1 + \sigma\sigma_1 + \frac{1}{qb_1};$$

$$a_{aa} = \operatorname{ctg}^2\gamma_1 + \operatorname{ctg}^2\gamma_2 + \sigma^2 + \sigma_2^2 + \frac{1}{qb_1} + \frac{1}{qb_2}.$$

Пример. В табл. 1 помещены исходные данные и вычислены поправки в углы и длины сторон, причем принято $q = 1:400$;

$$k = \frac{+681.10^{-6}}{41,64} = 16,35.10^{-6};\ k\rho'' = +3,37''.$$

Таблица 1

Исходные данные и поправки

Углы	Значения	Поправки	sin	Длины сторон	Поправки	ctg
α_1	71°05 05,5″	−0,5″				
β_1	25 43 37,5	−17,5	0,434085	158,425	+0,007	2,075
γ_1	83 11 17,0	+18,0	0,992941	362,388	—	0,019
	180 00 00,0					
α_2	86 11 34,0	+ 1,0				
β_2	20 18 07,5	+27,5	0,346970	131,224	−0,007	2,703
γ_2	73 30 18,5	−28,5	0,958845	362,635		0,296
	180 00 00,0			−0,247		

Последующее окончательное решение треугольников дано в табл. 2.

Таблица 2

Окончательное решение треугольников

Углы	Значения	sin	Длины сторон
α_1	71°05 05″	0,945999	345,331
β_1	24 43 20	0,434009	158,432
γ_1	83 11 35	0,992951	362.470
α_2	86 11 35	0,997794	377,210
β_2	20 18 35	0,347095	131,217
γ_2	73 29 50	0,958806	362,471

Средняя квадратическая ошибка стороны D из уравнивания будет

$$\left(\frac{m_D}{D}\right)^2 = \left(7{,}36 - \frac{41{,}63^2}{13{,}94}\right) m^2 = 2{,}69\, m^2.$$

Для сравнения укажем, что сторона D, вычисленная из решения двух треугольников (вариант 1) с углами $\alpha_1=\alpha_2=60°$, $\beta_1=\beta_2=30°$, $\gamma_1=\gamma_2=90°$, будет иметь несколько большую среднюю квадратическую ошибку, а именно: $\left(\frac{m_D}{D}\right)^2=2{,}76\ m^2$ (при том же значении $q=1:400$).

Изложенное в варианте 4 построение имеет еще одно теоретическое значение. Его можно положить в основу наиболее общего звена параллактической полигонометрии (рис. 3).

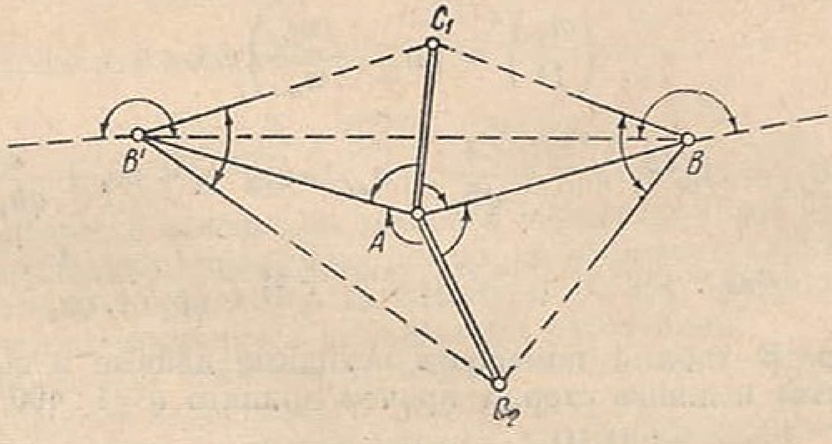

Рис. 3.

Действительно, вычислив стороны $D=AB$ и $D'=AB'$ по формуле (10), можно определить расстояние $BB'=d$:

$$d=D^2+D'^2-2DD'\cos\alpha, \tag{18}$$

где $\alpha=\angle BAB'$.

В работе [1] и в целом ряде других О. С. Макар предлагает по существу обычное звено, но называет его «общим», очевидно, оно получится как частный случай из представленного на рис. 3, если базисы $b_1=AC_1$ и $b_2=AC_2$ будут лежать в одном створе. Таким образом, рассмотренная автором схема не может претендовать на общность. Что касается сущности «общей теоретической основы», разработанной О. С. Макаром, то мы целиком согласны с ее оценкой, данной Т. Н. Чалюком [2]. Попутно хотелось бы отметить, что разработку метода параллактической полигонометрии В. Я. Струве, О. С. Макар относит к 1836 г. Однако Б. Н. Рабинович указывает более раннюю дату, а именно: 1818 г.

Основное содержание статьи доложено автором на семинаре по инженерной геодезии 1966 г. [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Макар О. С. Историческое развитие посредственных методов измерения расстояний. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 1. Изд-во Львов. ун-та, 1964.
2. Чалюк Т. Н. Рецензия на статью О. С. Макара. «Загальна теоретична основа посередніх методів вимірювання віддалі». В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 6. Изд-во Львов. ун-та, 1967.
3. Труды НИГАиК, вып. 16.
4. «Геодезия и картография» № 7, 1966, стр. 70.

Работа поступила
15 марта 1968 г.