УДК 528.22:531.26

М. И. МАРЫЧ

О ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ М. С. МОЛОДЕНСКОГО ДЛЯ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

В работе [1] показано, что первое приближение М. С. Молоденского для возмущающего потенциала [3], найденное с учетом всех величин, содержащих высоты рельефа Земли в первой степени, тождественно сумме первых двух членов разложения возмущающего потенциала в ряд Тейлора, найденных с этой же степенью учета рельефа Земли. Исходя из этого тождества, найдено, что полный возмущающий потенциал с учетом всех приближений Молоденского приводится к упомянутому ряду. Таким образом, было показано, что формула Стокса устанавливает зависимость между разложениями в ряд Тейлора по степеням высоты рельефа Земли аномалий силы тяжести и возмущающего потенциала.

1. Попытаемся получить данный результат несколько другим путем. Возмущающий потенциал T на физической поверхности Земли можно, как известно, разложить в ряд Тейлора по степеням высоты рельефа Земли

$$T_{\Gamma} = T - \frac{dT}{d\rho} H + \frac{1}{2} \frac{d^2T}{d\rho} H^2 - \cdots \quad (1)$$

Если этот ряд сходится для каждой точки физической поверхности Земли, то

$$T_{\Gamma} = \frac{R}{4\pi} \int \left(\Delta g - \frac{d\Delta g}{d\rho} H + \frac{1}{2} \frac{d^2\Delta g}{d\rho^2} H^2 - \cdots \right) [s(\psi) - 1] d\sigma, \quad (2)$$

где R — средний радиус Земли; Δg — измеренные аномалии силы тяжести; $s(\psi)$ — функция Стокса; $d\sigma$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса. Здесь, в формуле Стокса, обкладкой интеграла является разложение аномалии силы тяжести в ряд Тейлора. Так как в равенствах (1) и (2) правые части равны, то

$$T = \frac{R}{4\pi} \int \left(\Delta g - \frac{d\Delta g}{d\rho} H + \frac{1}{2} \frac{d^2\Delta g}{d\rho} H^2 - \cdots \right) [s(\psi) - 1] d\sigma + \\ + \frac{dT}{d\rho} H - \frac{1}{2} \frac{d^2T}{d\rho^2} H^2 + \cdots. \quad (3)$$

Так найденные приближения возмущающего потенциала T могут отличаться от приближений Молоденского на некоторую величину, которая с возрастанием номера приближения, при принятом предположении, становится как угодно малой. Однако при произвольном расиспользовании ряда Тейлора при вычислении возмущающего потенциала. Если радиальные производные аномалий силы тяжести и возмущающего потенциала вычисляются по аномалиям силы тяжести и при вычислениях согласно ряду Тейлора позаботиться о сохранении всех величин, вызванных членами разложения функций радиуса-вектора ρ физической поверхности Земли по степеням высот H, как это достигается с помощью малого параметра k в методе Молоденского, то приближения, полученные с помощью ряда Тейлора, должны быть тождественны приближениям Молоденского. Иначе говоря, если формулу (3) преобразовать в разложение по степеням малого параметра k $(0 \leqslant k \leqslant 1)$, а именно:

$$T_0 + kT_1 + k^2T_2 + \cdots = \frac{R}{4\pi}\iint\left\{\Delta g - \left[\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0 + k\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_1 + \cdots\right]kH + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2\Delta g}{d\rho^2}\right)_0 + \cdots\right]k^2H^2 - \cdots\right\}[s(\psi) - 1]\,d\sigma + \left[\left(\frac{dT}{d\rho}\right)_0 + \right.$$

$$\left. + k\left(\frac{dT}{d\rho}\right)_1 + \cdots\right]kH - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2T}{d\rho^2}\right)_0 + \cdots\right]k^2H^2 + \cdots, \tag{4}$$

то это преобразование должно привести к приближениям Молоденского для возмущающего потенциала. Приравнивая между собой члены обеих частей равенства, содержащие k в одинаковой степени, получаем

$$T_0 = \frac{R}{4\pi}\int \Delta g\,[s(\psi) - 1]\,d\sigma, \tag{5}$$

$$T_1 = \frac{R}{4\pi}\iint\left[-\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0 H\right][s(\psi) - 1]\,d\sigma + \left(\frac{dT}{d\rho}\right)_0 H, \tag{6}$$

$$T_2 = \frac{R}{4\pi}\iint\left[-\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_1 H + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Delta g}{d\rho^2}\right)_0 H^2\right][s(\psi) - 1]\,d\sigma +$$

$$+ \left(\frac{dT}{d\rho}\right)_1 H - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2T}{a\rho^2}\right)_0 H^2 \tag{7}$$

и так далее. Следовательно,

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots. \tag{8}$$

Так как последовательные поправки T_n $(n=1, 2, \ldots)$ возмущающего потенциала к Стоксову приближению T_0, полученные из (4), тождественны соответствующим поправкам Молоденского в предположении сходимости рядов (1) и (2), то они остаются тождественными и при расходимости этих рядов. Для того, чтобы более наглядно показать справедливость этого вывода, примем в качестве аномальной массы точечную массу, расположенную в произвольной точке радиуса-вектора ρ точки A физической поверхности Земли. В этом случае для точки A T_n является функцией расстояния x указанной массы от центра сферы радиуса R. Если $x<R$, то, как следует из изложенного, $T_n = f(x)$, найденное по формуле Молоденского, должно быть тождественно $T_n = \varphi(x)$, найденному с помощью ряда (4). Следовательно, $f(x) \equiv \varphi(x)$ и при $R < x < \rho$.

$$-\Delta g-\frac{2(T_0+T_1+\cdots)}{\rho}=\frac{dT}{d\rho}. \qquad (8)'$$

Таким образом, приведение формул Молоденского для последовательных приближений возмущающего потенциала T_0, T_0+T_1, $T_0+T_1+T_2$ и т. д. к ряду Тейлора, по существу, является подтверждением правильности вывода этих формул.

2. Итак, ряд (4), являющийся суммой двух рядов, представляет процесс последовательных приближений Молоденского для возмущающего потенциала, несмотря на то, что сходимость этих рядов не обеспечивается реальной Землей. В работе [2] путем соответствующих преобразований показано, что при $H=\mathrm{const}$ названная сумма дает точное значение возмущающего потенциала на физической поверхности Земли. Попытаемся выяснить этот момент и в случае реального рельефа Земли для второго приближения возмущающего потенциала, полученного из (4).

С этой целью найдем изменение величины $T=T_0+T_1+T_2$, вызванное увеличением высот H, на некоторую постоянную величину ΔH. Примем в качестве высот H рельефа Земли высоты $H'=H+\Delta H$ ($R'=$ $=R-\Delta H$). Теперь, используя (7), получаем

$$\Delta T_2=\frac{R'}{4\pi}\iint\Big[-\Delta\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_1 H-\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_1\Delta H+\frac{1}{2}\Delta\left(\frac{d^2\Delta g}{d\rho^2}\right)_0 H^2+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Delta g}{d\rho^2}\right)_0(2H\Delta H+\Delta H^2)\Big][s(\psi)-1]\,d\sigma+\Delta\left(\frac{dT}{d\rho}\right)_1 H+\left(\frac{dT}{d\rho}\right)_1\Delta H-$$
$$-\frac{1}{2}\Delta\left(\frac{d^2T}{d\rho^2}\right)_0 H^2-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2T}{d\rho^2}\right)_0(2H\Delta H+\Delta H^2). \qquad (9)$$

Вычислим с требуемой точностью фигурирующие здесь величины. При нахождении первой поправки $\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_1$ в вертикальный градиент $\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0$ аномалии силы тяжести, найденный по формуле Нумерова и изменения этой поправки $\Delta\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_1$, соответствующего указанному изменению высот, воспользуемся формулой О. М. Остача [4].

$$\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_1=-\frac{1}{2\pi R}\int\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0\frac{H-H_0}{r^3}\,d\sigma+\frac{1}{2\pi R^2}\int(\Delta g+$$
$$+\Delta g_0)\frac{H-H_0}{r^3}\,d\sigma, \qquad (10)$$

где

$$\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0=\frac{1}{2\pi R}\int\frac{\Delta g-\Delta g_0}{r^3}\,d\sigma-\frac{2\Delta g}{R}, \qquad (10)'$$

Δg_0 и H_0 — значения Δg и H в исследуемой точке, а $r=2\sin\frac{\psi}{2}$. Величина $-\frac{2\Delta g}{R}$ в формуле Нумерова пренебрегаемо мала. Поэтому

$$\left(\frac{\ldots}{d\rho}\right)_1 = -\frac{\ldots}{2\pi R}\int\left(\frac{\ldots}{d\rho}\right)_0 \frac{\ldots}{r^3}\, d\sigma = \frac{\ldots}{2\pi R}\int\left[\left(\frac{\ldots}{d\rho}\right)_0 -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0^{(0)}\right]\frac{d\sigma}{r^3} - \frac{1}{2\pi R}\int\left[H\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0 - H_0\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0^{(0)}\right]\frac{d\sigma}{r^3}$$

и

$$\Delta\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_1 = 0.$$

Стоксово приближение второй радиальной производной аномалии силы тяжести [2] имеет вид

$$\left(\frac{d^2\Delta g}{d\rho^2}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R}\int\left[\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0 - \left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0^{(0)}\right]\frac{d\sigma}{r^3}.$$

Следовательно, $\Delta\left(\frac{d^2\Delta g}{d\rho^2}\right)_0 = 0.$

Найдем еще величины $\left(\frac{dT}{d\rho}\right)_1$, $\left(\frac{d^2T}{d\rho^2}\right)_0$ и их изменения, вызванные изменением высот рельефа Земли. Имеем

$$\left(\frac{dT}{d\rho}\right)_1 = -\frac{2T_1}{R} + \frac{2T_0 H}{R^2}.$$

Отсюда получаем

$$\Delta\left(\frac{dT}{d\rho}\right)_1 = -\frac{2\Delta T_1}{R} + \frac{2T_0\Delta H}{R^2}.$$

Используя формулу (6), соотношение

$$\left(\frac{dT}{d\rho}\right)_0 = -\Delta g - \frac{2T_0}{R},$$

а также

$$\Delta\left(\frac{dT}{d\rho}\right)_0 = 0,$$

находим

$$\Delta T_1 = -\frac{R\Delta H}{4\pi}\int\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0 [s(\psi) - 1]\, d\sigma - \left(\Delta g + \frac{2T_0}{R}\right)\Delta H.$$

Для того чтобы выполнить интегрирование, воспользуемся известным соотношением

$$\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0 = -\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\,\Delta g_n,$$

где Δg_n — сферическая функция n-го порядка в разложении Δg. Принимая во внимание, что

$$s(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\psi), \qquad (11)$$

$$-\frac{R\Delta H}{4\pi}\int\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0[s(\psi)-1]d\sigma=\left(\Delta g+\frac{3T_0}{R}\right)\Delta H$$

и

$$\Delta T_1=T_0\,\frac{\Delta H}{R}.$$

Следовательно, с требуемой степенью точности можно принять

$$\left(\frac{d^2T}{d\rho^2}\right)_0=-\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0.$$

Искомое изменение этой функции

$$\Delta\left(\frac{d^2T}{d\rho^2}\right)_0=0.$$

Итак, уже найдены все величины, фигурирующие в (9). Используя их, получаем первый член P формулы (9) в виде

$$P=\frac{R}{4\pi}\int(A+B)[s(\psi)-1]d\sigma,$$

где

$$A=\frac{\Delta H}{2\pi R}\int\left[H\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0-H_0\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0^{(0)}\right]\frac{d\sigma}{r^3}=-\frac{\Delta H}{R}\sum_{n=0}^{\infty}n\left[H\left(\frac{d\Delta g}{p\rho}\right)_0\right]_n,$$

$$B=\frac{\Delta H^2}{4\pi R}\int\left[\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0-\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0^{(0)}\right]\frac{d\sigma}{r^3}=-\frac{\Delta_{,}H^2}{2R}\sum_{n=0}^{\infty}n\left[\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0\right]_n.$$

Теперь, используя разложение (11), после соответствующих преобразований, получаем

$$P=-\Delta H\left(\frac{d\Delta g}{d\rho}\right)_0\left(H+\frac{1}{2}\,\Delta H\right).$$

Так как сумма остальных членов формулы (9), найденная с требуемой точностью, равна $-P$, то $\Delta T_2=0$. Принимая во внимание, что $\Delta T_0=\Delta T_1=\Delta T_2=0$, находим окончательно

$$\Delta T=\Delta T_1+\Delta T_2=\Delta T_3=0.$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что увеличение высот рельефа Земли хотя и приводит к расходимости рядов, фигурирующих в формуле (4) (отсчетная сфера, проведенная ранее выше аномальной массы, проходит теперь ниже ее), однако сумма этих рядов, определяющая возмущающий потенциал на физической поверхности земли, не изменяется. Отметим, что возмущающий потенциал, найденный по формуле Молоденского, также не изменяется при изменении высот рельефа Земли на постоянную величину.

3. Таким образом, результат, полученный по формуле Молоденского для второго приближения возмущающего потенциала, может быть получен и по формуле, вытекающей из ряда Тейлора (4). Тем не