

В. И. ПАВЛОВ

К ВОПРОСУ ОБ УРАВНИВАНИИ УГЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРИЕНТИРОВАНИЯ АЭРОСНИМКОВ

В работе автора [1] предложен способ совместного уравнивания относительных высот точек фотографирования путем сглаживания разностей $h_{ст} - B_z$ при помощи полинома второй степени, учитывающего закономерность накопления систематических ошибок высот точек маршрутной сети.

В данной статье излагается способ совместного уравнивания угловых элементов ориентирования аэроснимков, определенных по измерениям, выполненным в полете и фотограмметрическим методом. Способ основан на сглаживании эмпирических данных $\alpha_n^0 - \alpha_{\Phi}^0$ (или $\omega_n^0 - \omega_{\Phi}^0$) при помощи полинома

$$\delta\alpha_i = c_0 + ic_1, \quad (1)$$

учитывающего закономерность накопления систематических ошибок углов наклона аэроснимков относительно принятой системы координат при построении сети пространственной фототриангуляции.

Обозначим разность измеренных величин $\alpha_{n_i}^0 - \alpha_{\Phi_i}^0$ для i -го аэроснимка маршрута через W_{α_i} , тогда в соответствии с равенством (1) запишем:

$$v_{\alpha_i} = c_0 + c_1 i - W_{\alpha_i}, \quad (2)$$

$$(\dots \dots \dots)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Решая систему уравнений (2) при условии $[v_{\alpha} v_{\alpha}] = \min$, получим:

$$\left. \begin{aligned} c_0 n + c_1 [i] - [W_{\alpha}] &= 0; \\ c_0 [i] + c_1 [i^2] - [i W_{\alpha}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Поскольку при уравнивании угловых элементов ориентирования путем сглаживания каждое значение W_{α} для центрального аэроснимка комбинируется со значениями W_{α} для i аэроснимков, расположенных слева и справа, то в уравнениях (3) следует принять $[i] = 0$. Тогда коэффициенты c_0 и c_1 найдем из выражений:

$$c_0 = \frac{1}{n} [W_{\alpha}],$$

$$c_1 = \frac{1}{[i^2]} [i W_{\alpha}].$$

Придавая в каждой секции аэроснимкам, идущим от центрального влево номера $-1, -2, -3, \dots, -\frac{k-1}{2}$, а вправо — номера $1, 2, 3, \dots, \frac{k-1}{2}$, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} W_{\alpha_i}; \\ c_1 &= \frac{12}{k(k^2-1)} \sum_{i=-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} i W_{\alpha_i} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

С учетом значений коэффициентов c_0 и c_1 из (4) уравнение (1) примет вид:

$$\delta \alpha_i = \frac{1}{n} \sum_{i=-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} W_{\alpha_i} + \frac{12i}{k(k^2-1)} \sum_{i=-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} i W_{\alpha_i}. \quad (5)$$

Получим исходные формулы для вычисления значений $\delta \alpha$ при числе аэроснимков в каждой секции 3 и 5.

Пусть каждая секция состоит из трех аэроснимков, тогда в соответствии с (5) запишем:

$$\delta \alpha_{-1} = \frac{1}{6} (5 W_{\alpha_{-1}} + 2 W_{\alpha_0} - W_{\alpha_{+1}}) = W_{\alpha_{-1}} - \frac{1}{6} (W_{\alpha_{-1}} - 2 W_{\alpha_0} + W_{\alpha_{+1}}); \quad (6)$$

$$\delta \alpha_0 = \frac{1}{3} (W_{\alpha_{-1}} + W_{\alpha_0} + W_{\alpha_{+1}}) = W_{\alpha_0} + \frac{1}{3} (W_{\alpha_{-1}} - 2 W_{\alpha_0} + W_{\alpha_{+1}}); \quad (7)$$

$$\delta \alpha_{+1} = \frac{1}{6} (-W_{\alpha_{-1}} + 2 W_{\alpha_0} + 5 W_{\alpha_{+1}}) = W_{\alpha_{+1}} - \frac{1}{6} (W_{\alpha_{-1}} - 2 W_{\alpha_0} + W_{\alpha_{+1}}). \quad (8)$$

В равенствах (6)–(8) выражение, взятое в круглые скобки, представляет собой вторую разность W_{α} . Обозначив эту разность через R'' , окончательно получим:

$$\delta \alpha_{-1} = W_{\alpha_{-1}} - \frac{1}{6} R''; \quad (9)$$

$$\delta \alpha_0 = W_{\alpha_0} + \frac{1}{3} R''; \quad (10)$$

$$\delta \alpha_{+1} = W_{\alpha_{+1}} - \frac{1}{6} R''. \quad (11)$$

Практическое применение формул (9)–(11) заключается в следующем.

По найденным значениям углов α_0^0 и $\alpha_{\pm 1}^0$ вычисляют невязки W_{α} для всех аэроснимков маршрута и составляют таблицу разностей до второго порядка включительно. Затем к каждому значению W_{α_i} прибавляют $1:3$ второй разности, соответствующей значению W_{α} в той же

строке. Сглаженные значения $\delta\alpha$ для крайних аэроснимков маршрута определяют путем вычитания из W_{α_i} и W_{α_n} 1:6 ближайшей второй разности.

Уравненные значения углов наклона аэроснимков $\alpha_{ур}$ вычисляют по одной из следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ур_i} &= \alpha_{\phi_i}^0 + \delta\alpha_i; \\ \alpha_{ур_i} &= \alpha_{\pi_i}^0 + \nu_{\alpha_i}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Все вычисления выполняются в последовательности, приведенной в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

№ аэро-снимка	$\alpha_{\pi_i}^0$	$\alpha_{\phi_i}^0$	W_{α_i}	R^I	R^{II}	$V_{\alpha_i} = \frac{1}{3} R^{II}$	$\delta\alpha_i$	$\alpha_{ур}$
1	$-0^g 43$	$-0^g 43$	0^c				$+1^c 2$	$-0^g 41.8$
2	$-1,50$	$-1,52$	$+2$	$+2$	-7	-2.3	-0.3	$-1,52.3$
3	$-0,35$	$-0,32$	-3	-5	$+11$	$+3,6$	$+0,6$	$-0,31.4$
4	$+0,21$	$+0,18$	$+3$	$+6$	-1	$-0,3$	$+2,7$	$+0,20.7$
5	$-1,03$	$-1,11$	$+8$	$+5$	-10	$-3,3$	$+4,7$	$-1,06.3$
6	$+1,63$	$+1,60$	$+3$	-5	$+11$	$+3,6$	$+6,6$	$+1,66.6$
7	$+1,19$	$+1,10$	$+9$	$+6$	-1	$-0,3$	$+8,7$	$+1,18.7$
8	$+0,81$	$+0,67$	$+14$	$+5$			$+14,2$	$+0,81.2$

Если каждое значение W_{α} группировать с двумя соседними слева и справа (в секции пять аэроснимков), то поправки $\delta\alpha$ в углы наклона аэроснимков определяются по формулам:

$$\delta\alpha_{-2} = W_{\alpha_{-2}} + \frac{1}{5}(-2 W_{\alpha_{-2}} + 2 W_{\alpha_{-1}} + W_{\alpha_0} - W_{\alpha_{+2}}); \quad (13)$$

$$\delta\alpha_{-1} = W_{\alpha_{-1}} + \frac{1}{10}(4 W_{\alpha_{-2}} - 7 W_{\alpha_{-1}} + 2 W_{\alpha_0} + W_{\alpha_{+1}}); \quad (14)$$

$$\delta\alpha_0 = W_{\alpha_0} + \frac{1}{5}(W_{\alpha_{-2}} + W_{\alpha_{-1}} - 4 W_{\alpha_0} + W_{\alpha_{+1}} + W_{\alpha_{+2}}); \quad (15)$$

$$\delta\alpha_{+1} = W_{\alpha_{+1}} + \frac{1}{10}(W_{\alpha_{-1}} + 2 W_{\alpha_0} - 7 W_{\alpha_{+1}} + 4 W_{\alpha_{+2}}); \quad (16)$$

$$\delta\alpha_{+2} = W_{\alpha_{+2}} + \frac{1}{5}(-W_{\alpha_{-2}} + W_{\alpha_0} + 2 W_{\alpha_{+1}} - 2 W_{\alpha_{+2}}); \quad (17)$$

или

$$\delta\alpha_{-2} = W_{\alpha_{-2}} - R_B^{II} - \frac{4}{5} R_B^{III} - \frac{1}{5} R^{IV}; \quad (18)$$

$$\delta\alpha_{-1} = W_{\alpha_{-1}} + \frac{1}{2} R_B^{II} + \frac{1}{10} R_B^{III}; \quad (19)$$

$$\delta\alpha_0 = W_{\alpha_0} + R^{II} + \frac{1}{5} R^{IV}; \quad (20)$$

$$\delta\alpha_{+1} = W_{\alpha_{+1}} + \frac{1}{2} R_B^{II} - \frac{1}{10} R_B^{III}; \quad (21)$$

$$\delta \alpha_{+2} = W_{\alpha_{+2}} - R_{\text{н}}^{\text{II}} + \frac{4}{5} R^{\text{III}} - \frac{1}{5} R^{\text{IV}}; \quad (22)$$

где

$$R_{\text{в}}^{\text{II}} = W_{\alpha_0} - 2 W_{\alpha_{-1}} + W_{\alpha_{-2}};$$

$$R_{\text{в}}^{\text{III}} = W_{\alpha_{+1}} - 3 W_{\alpha_0} + 3 W_{\alpha_{-1}} - W_{\alpha_{-2}};$$

$$R^{\text{IV}} = W_{\alpha_{+2}} - 4 W_{\alpha_{+1}} + 6 W_{\alpha_0} - 4 W_{\alpha_{-1}} + W_{\alpha_{-2}};$$

$$R_{\text{н}}^{\text{III}} = W_{\alpha_{+2}} - 3 W_{\alpha_{+1}} + 3 W_{\alpha_0} - W_{\alpha_{-1}};$$

$$R_{\text{н}}^{\text{II}} = W_{\alpha_{+2}} - 2 W_{\alpha_{+1}} + W_{\alpha_0}.$$

Числовой пример применения формул (18)–(22) приведен в табл. 2.

Таблица 2

№ аэро- снимка	$\alpha_{\text{П}i}^0$	$\alpha_{\text{Ф}i}^0$	W_{α_i}	R^{I}	R^{II}	R^{III}	R^{IV}	$V_{\alpha_i} = R^{\text{II}} + \frac{1}{5} R^{\text{IV}}$	$\delta \alpha$	$\alpha_{\text{ур}}$
1	−0 ^g ,43	−0 ^g ,43	0 ^c						−1 ^c ,4	−0 ^g ,44,4
2	−1,50	−1,52	+2	+2	−7				+0,3	−1,51,7
3	−0,35	−0,32	−3	−5	+11	+18	−30	+5,0	+2,0	−0,30,0
4	+0,21	+0,18	+3	+6	−1	−12	+3	−0,4	+2,6	+0,20,6
5	−1,03	−1,11	+8	+5	−10	−9	+30	−4,0	+4,0	−1,07,0
6	+1,63	+1,60	+3	−5	+11	+21	−33	+4,4	+7,4	+1,67,4
7	+1,19	+1,10	+9	+6	−1	−12			+9,7	+1,19,7
8	+0,81	+0,67	+14	+5					+12,0	+0,79,0

Получим теперь формулы для вычисления средних квадратических ошибок уравненных значений измеренных углов наклона аэроснимков маршрута. Для этого воспользуемся следующей зависимостью:

$$\bar{\Delta}_{\alpha_i} = \Delta_{\alpha_{\text{Ф}i}} + \delta \alpha_i, \quad (23)$$

где $\bar{\Delta}_{\alpha_i}$ — истинная ошибка уравненного значения $\alpha_{\text{ур}i}$,

Δ_{α_i} — истинная ошибка измеренного значения $\alpha_{\text{Ф}i}^0$,

$\delta \alpha_i$ — поправки в измеренные значения $\alpha_{\text{Ф}i}^0$, вычисляемые по формуле (1).

При определении коэффициентов c формулы (1) по трем значениям W_{α} , согласно (6)–(8) и (23) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Delta}_{\alpha_{-1}} &= \Delta_{\alpha_{-1}} + \frac{1}{6} (5 W_{\alpha_{-1}} + 2 W_{\alpha_0} - W_{\alpha_{+1}}), \\ \bar{\Delta}_{\alpha_0} &= \Delta_{\alpha_0} + \frac{1}{3} (W_{\alpha_{-1}} + W_{\alpha_0} + W_{\alpha_{+1}}), \\ \bar{\Delta}_{\alpha_{+1}} &= \Delta_{\alpha_{+1}} + \frac{1}{6} (-W_{\alpha_{-1}} + 2 W_{\alpha_0} + 5 W_{\alpha_{+1}}). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Поскольку

$$W_{\alpha_i} = \alpha_{\text{П}i}^0 - \alpha_{\text{Ф}i}^0 = \Delta_{\alpha_{\text{П}i}} - \Delta_{\alpha_{\text{Ф}i}},$$

$$\Delta_{a_{\Pi i}} = t_1 + s_i,$$

$$\Delta_{a_{\Phi i}} = t_2 + \sum_{i=2} \mu_i + (i-1)\sigma,$$

где s_i — случайная ошибка измерения угла наклона аэроснимка α_{Π}^0 в полете;

t_1 — постоянная ошибка измеренных углов наклона аэроснимков α_{Π}^0 ;

μ, σ — случайная и систематическая ошибка измерения углов наклона аэроснимков α_{Φ}^0 ;

t_2 — постоянная ошибка измеренных углов наклона аэроснимков α_{Φ}^0 .

то

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Delta}_{a-1} &= t_1 + \frac{1}{6}(5s_{-1} + 2s_0 - s_{+1}) - \frac{1}{6}(\mu_0 - \mu_{+1}), \\ \bar{\Delta}_{a_0} &= t_1 + \frac{1}{3}(s_{-1} + s_0 + s_{+1}) + \frac{1}{3}(\mu_0 - \mu_{+1}), \\ \bar{\Delta}_{a+1} &= t_1 + \frac{1}{6}(-s_{-1} + 2s_0 + 5s_{+1}) - \frac{1}{6}(\mu_0 - \mu_{+1}). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Влияние слагаемого t_1 , как постоянной величины, входящей во все уравненные значения углов наклона аэроснимков, исключается при горизонтировании маршрутной сети по опорным точкам. Поэтому его не будем учитывать при дальнейшем анализе.

Из равенств (25) следует:

$$\left. \begin{aligned} m_{a-1} &= m_{a+1} = \sqrt{0,83 m_s^2 + 0,08 m_{\mu}^2}; \\ m_{a_0} &= \sqrt{0,33 m_s^2 + 0,22 m_{\mu}^2}; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где m_s — средняя квадратическая ошибка определения угла наклона аэроснимков по измерениям, выполненным в полете.

m_{μ} — средняя квадратическая ошибка определения угла наклона аэроснимков фотограмметрическим методом.

Если коэффициенты s уравнения (1) определяются по значениям W_a для пяти аэроснимков, то средние квадратические ошибки уравненных углов α_{yp} этих аэроснимков вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} m_{a-2} &= m_{a+2} = \sqrt{0,60 m_s^2 + 0,24 m_{\mu}^2}, \\ m_{a-1} &= m_{a+1} = \sqrt{0,30 m_s^2 + 0,26 m_{\mu}^2}, \\ m_{a_0} &= \sqrt{0,20 m_s^2 + 0,40 m_{\mu}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Исследуем формулы (26) и (27), для чего приведем их к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\pm 1} &= \frac{m_s}{m_{a_{\pm 1}}} = \frac{1}{\sqrt{0,83 + 0,08 Q^2}}; \\ \varphi_0 &= \frac{m_s}{m_{a_0}} = \frac{1}{\sqrt{0,33 + 0,22 Q^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\pm 2} &= \frac{m_s}{m_{\alpha_{\pm 2}}} = \frac{1}{\sqrt{0,60 + 0,24 Q^2}}; \\ \varphi_{\pm 1} &= \frac{m_s}{m_{\alpha_{\pm 1}}} = \frac{1}{\sqrt{0,30 + 0,26 Q^2}}; \\ \varphi_0 &= \frac{m_s}{m_{\alpha_0}} = \frac{1}{\sqrt{0,20 + 0,40 Q^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$Q = \frac{m_{\mu}}{m_s}.$$

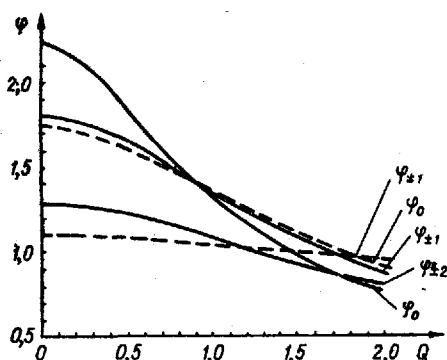


Рис. 1.

На рис. 1 в соответствии с формулами (28) (пунктирные линии) и формулами (29) (сплошные линии) дана графическая интерпретация изменения коэффициентов φ при изменении Q от 0 до 2.

Анализ кривых φ рис. 1 позволяет сделать следующие выводы:

1. При $0 \leq Q \leq 0,8$ поправки в измеренные углы наклона аэроснимков следует определять по формуле (20), а при $0,8 < Q \leq 1,4$ — по формуле (10).

В первом случае ошибки определения углов наклона аэроснимков по измерениям, выполненным в полете, уменьшаются соответственно в 2,2—1,4 раза, а во втором случае — в 1,4—1,1 раза.

2. С наименьшей точностью уравненные углы наклона определяют для крайних аэроснимков маршрута. Для исключения влияния этих углов на точность конечного результата необходимо в наблюдение маршрутной сети включать по одному аэроснимку за границами участка съемки.

3. Если $Q > 1,4$, то совместное уравнивание α_n^0 и α_f^0 выполнять нецелесообразно.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Павлов. Уравнивание сетей пространственной фототриангуляции с использованием данных статоскопа. Сб. статей «Вопросы фотограмметрии». Изд. АН СССР, М.—Л., 1965.

Работа поступила
31 марта 1965 г.