

УДК 528.34:516.3

А. Е. ФИЛИППОВ

О КООРДИНАТНЫХ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ В СЕТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

В статье [2] рассмотрены наряду с прочими координатные условные уравнения и условные уравнения жесткости направлений выходных сторон, возникающие в сети пространственной триангуляции при наличии избыточных исходных данных. При этом предполагалось, что вычисления ведутся в декартовых координатах x, y, z .

Если использовать геодезические координаты B, L, H , то вместо уравнений абсцисс, ординат и аппликат нужно будет составить уравнения геодезических широт, долгот и высот. Уравнения жесткости направлений выходных сторон также примут иную форму. Получить

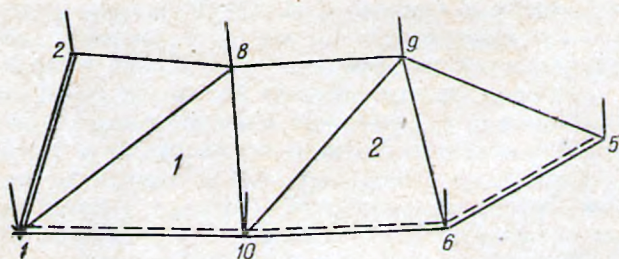


Схема пространственной триангуляции.

указанные уравнения в виде, позволяющем с помощью схемы триангуляции записать их для любого выбора ходовой линии, можно следующим образом.

Пусть в триангуляционной сети (см. рисунок) с измеренными горизонтальными углами α_i^* и зенитными расстояниями z_{ij} для пунктов 1, 2, 5 известны жесткие значения геодезических координат B_i, L_i, H_i . В пункте 1 получены из наблюдений астрономические координаты φ_1, λ_1 и астрономический азимут $\alpha_{1,2}$ направления 1—2. Нетрудно подсчитать, что число избыточных исходных данных в настоящем случае равно 5, и мы будем иметь 5 условных уравнений, обусловленных жесткостью сети: два уравнения жесткости направления стороны 1—2 и три координатных уравнения, которые можно составить между пунктами 1 и 5.

В самом общем виде условные уравнения геодезических широт, долгот и высот между пунктами 1 и 5 запишутся так:

$$\begin{aligned}\Delta B_5' + (B_5' - B_5) &= 0, \\ \Delta L_5' + (L_5' - L_5) &= 0, \\ \Delta H_5' + (H_5' - H_5) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь B_5', L_5', H_5' — вычисленные по ходовой линии 1—10—6—5 значения геодезических координат пункта 5; B_5, L_5, H_5 — известные жесткие значения координат этого пункта, а $\Delta B_5', \Delta L_5', \Delta H_5'$ — поправки вычисленных координат, являющиеся функциями поправок измеренных элементов триангуляции, принимавших участие в передаче координат по выбранной ходовой линии.

Для получения свободных членов уравнений (1) нужно прежде всего передать по линии 1—10—6—5 астрономические координаты и азимуты, зафиксировав предварительно треугольники, элементы которых $(\alpha_{ij}^{jk}, z_{ij})$ будут использоваться при вычислении астрономических широт и долгот и при переходе от прямых астрономических азимутов α_{ij} к обратным α_{ji} , а затем по той же линии выполнить вычисление геодезических координат. Формулы для передачи геодезических координат можно найти, например, в работе [1]. Треугольники, о которых идет речь, на рисунке занумерованы.

Если обозначить через $\Delta x_5', \Delta y_5', \Delta z_5'$ поправки вычисленных по линии 1—10—6—5 декартовых координат пункта 5, то будут справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}(M_5 + H_5) \Delta B_5' &= -\sin B_5 \cos L_5 \Delta x_5' - \sin B_5 \sin L_5 \Delta y_5' + \cos B_5 \Delta z_5', \\(N_5 + H_5) \cos B_5 \Delta L_5' &= -\sin L_5 \Delta x_5' + \cos L_5 \Delta y_5', \\ \Delta H_5' &= \cos B_5 \cos L_5 \Delta x_5' + \cos B_5 \sin L_5 \Delta y_5' + \sin B_5 \Delta z_5'.\end{aligned}\quad (2)$$

Подставив в формулы (2) вместо $\Delta x_5', \Delta y_5', \Delta z_5'$ их выражения через поправки измеренных элементов триангуляции (см. [2]), мы сможем после некоторых преобразований написать в следующем виде координатные условные уравнения для выбранной ходовой линии:

а) условное уравнение геодезической широты

$$\begin{aligned}& \frac{\partial B_5}{\partial \varphi_1} \delta \varphi_1 + \frac{\partial B_5}{\partial \lambda_1} \delta \lambda_1 + \frac{\partial B_5}{\partial \alpha_{1,10}} \delta \alpha_{1,10} + \frac{\partial B_5}{\partial \varphi_{10}} \delta \varphi_{10} + \frac{\partial B_5}{\partial \lambda_{10}} \delta \lambda_{10} + \frac{\partial B_5}{\partial \alpha_{10,6}} \delta \alpha_{10,6} + \\& + \frac{\partial B_5}{\partial \varphi_6} \delta \varphi_6 + \frac{\partial B_5}{\partial \lambda_6} \delta \lambda_6 + \frac{\partial B_5}{\partial \alpha_{6,5}} \delta \alpha_{6,5} + Q_1^{1,10,5} \delta z_{1,10} + Q_1^{10,6,5} \delta z_{10,6} + \\& + Q_1^{6,5,5} \delta z_{6,5} + \frac{\partial B_5}{\partial s_{1,8}} s_{1,8} (\text{ctg } A_2^{1,8} \delta A_2^{1,8} - \text{ctg } A_8^{1,2} \delta A_8^{1,2}) + \\& + \frac{\partial B_5}{\partial s_{1,10}} s_{1,10} (\text{ctg } A_8^{1,10} \delta A_8^{1,10} - \text{ctg } A_{10}^{1,8} \delta A_{10}^{1,8}) + \frac{\partial B_5}{\partial s_{10,8}} s_{10,8} (\text{ctg } A_1^{8,10} \delta A_1^{8,10} - \\& - \text{ctg } A_8^{1,10} \delta A_8^{1,10}) + \frac{\partial B_5}{\partial s_{10,9}} s_{10,9} (\text{ctg } A_8^{9,10} \delta A_8^{9,10} - \text{ctg } A_9^{8,10} \delta A_9^{8,10}) + \\& + \frac{\partial B_5}{\partial s_{10,6}} s_{10,6} (\text{ctg } A_9^{6,10} \delta A_9^{6,10} - \text{ctg } A_6^{9,10} \delta A_6^{9,10}) + \frac{\partial B_5}{\partial s_{6,9}} s_{6,9} (\text{ctg } A_{10}^{6,9} \delta A_{10}^{6,9} - \\& - \text{ctg } A_9^{6,10} \delta A_9^{6,10}) + \frac{\partial B_5}{\partial s_{6,5}} s_{6,5} (\text{ctg } A_9^{5,6} \delta A_9^{5,6} - \text{ctg } A_5^{6,9} \delta A_5^{6,9}) + (B_5' - B_5) = 0,\end{aligned}\quad (3)$$

в) условное уравнение геодезической долготы

$$\begin{aligned}& \frac{\partial L_5}{\partial \varphi_1} \delta \varphi_1 + \frac{\partial L_5}{\partial \lambda_1} \delta \lambda_1 + \frac{\partial L_5}{\partial \alpha_{1,10}} \delta \alpha_{1,10} + \frac{\partial L_5}{\partial \varphi_{10}} \delta \varphi_{10} + \frac{\partial L_5}{\partial \lambda_{10}} \delta \lambda_{10} + \frac{\partial L_5}{\partial \alpha_{10,6}} \delta \alpha_{10,6} + \\& + \frac{\partial L_5}{\partial \varphi_6} \delta \varphi_6 + \frac{\partial L_5}{\partial \lambda_6} \delta \lambda_6 + \frac{\partial L_5}{\partial \alpha_{6,5}} \delta \alpha_{6,5} + Q_2^{1,10,5} \delta z_{1,10} + Q_2^{10,6,5} \delta z_{10,6} + Q_2^{6,5,5} \delta z_{6,5} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial L_5}{\partial s_{1,8}} s_{1,8} (\operatorname{ctg} A_2^{1,8} \delta A_2^{1,8} - \operatorname{ctg} A_8^{1,2} \delta A_8^{1,2}) + \frac{\partial L_5}{\partial s_{1,10}} s_{1,10} (\operatorname{ctg} A_8^{1,10} \delta A_8^{1,10} - \\
& - \operatorname{ctg} A_{10}^{1,8} \delta A_{10}^{1,8}) + \frac{\partial L_5}{\partial s_{10,8}} s_{10,8} (\operatorname{ctg} A_1^{8,10} \delta A_1^{8,10} - \operatorname{ctg} A_8^{1,10} \delta A_8^{1,10}) + \\
& + \frac{\partial L_5}{\partial s_{10,9}} s_{10,9} (\operatorname{ctg} A_8^{9,10} \delta A_8^{9,10} - \operatorname{ctg} A_9^{8,10} \delta A_9^{8,10}) + \frac{\partial L_5}{\partial s_{10,6}} s_{10,6} (\operatorname{ctg} A_9^{6,10} \delta A_9^{6,10} - \\
& - \operatorname{ctg} A_6^{9,10} \delta A_6^{9,10}) + \frac{\partial L_5}{\partial s_{6,9}} s_{6,9} (\operatorname{ctg} A_{10}^{6,9} \delta A_{10}^{6,9} - \operatorname{ctg} A_9^{6,10} \delta A_9^{6,10}) + \\
& + \frac{\partial L_5}{\partial s_{6,5}} s_{6,5} (\operatorname{ctg} A_9^{5,6} \delta A_9^{5,6} - \operatorname{ctg} A_5^{6,9} \delta A_5^{6,9}) + (L_5' - L_5) = 0, \quad (4)
\end{aligned}$$

с) условное уравнение геодезической высоты

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H_5}{\partial \varphi_1} \delta \varphi_1 + \frac{\partial H_5}{\partial \lambda_1} \delta \lambda_1 + \frac{\partial H_5}{\partial \alpha_{1,10}} \delta \alpha_{1,10} + \frac{\partial H_5}{\partial \varphi_{10}} \delta \varphi_{10} + \frac{\partial H_5}{\partial \lambda_{10}} \delta \lambda_{10} + \frac{\partial H_5}{\partial \alpha_{10,6}} \delta \alpha_{10,6} + \\
& + \frac{\partial H_5}{\partial \varphi_6} \delta \varphi_6 + \frac{\partial H_5}{\partial \lambda_6} \delta \lambda_6 + \frac{\partial H_5}{\partial \alpha_{6,5}} \delta \alpha_{6,5} + Q_3^{1,10,5} \delta z_{1,10} + Q_3^{10,6,5} \delta z_{10,6} + Q_3^{6,5,5} \delta z_{6,5} + \\
& + \frac{\partial H_5}{\partial s_{1,8}} s_{1,8} (\operatorname{ctg} A_2^{1,8} \delta A_2^{1,8} - \operatorname{ctg} A_8^{1,2} \delta A_8^{1,2}) + \frac{\partial H_5}{\partial s_{1,10}} s_{1,10} (\operatorname{ctg} A_8^{1,10} \delta A_8^{1,10} - \\
& - \operatorname{ctg} A_{10}^{1,8} \delta A_{10}^{1,8}) + \frac{\partial H_5}{\partial s_{10,8}} s_{10,8} (\operatorname{ctg} A_1^{8,10} \delta A_1^{8,10} - \operatorname{ctg} A_8^{1,10} \delta A_8^{1,10}) + \quad (5) \\
& + \frac{\partial H_5}{\partial s_{10,9}} s_{10,9} (\operatorname{ctg} A_8^{9,10} \delta A_8^{9,10} - \operatorname{ctg} A_9^{8,10} \delta A_9^{8,10}) + \frac{\partial H_5}{\partial s_{10,6}} s_{10,6} (\operatorname{ctg} A_9^{6,10} \delta A_9^{6,10} - \\
& - \operatorname{ctg} A_6^{9,10} \delta A_6^{9,10}) + \frac{\partial H_5}{\partial s_{6,9}} s_{6,9} (\operatorname{ctg} A_{10}^{6,9} \delta A_{10}^{6,9} - \operatorname{ctg} A_9^{6,10} \delta A_9^{6,10}) + \\
& + \frac{\partial H_5}{\partial s_{6,5}} s_{6,5} (\operatorname{ctg} A_9^{5,6} \delta A_9^{5,6} - \operatorname{ctg} A_5^{6,9} \delta A_5^{6,9}) + (H_5' - H_5) = 0.
\end{aligned}$$

В этих уравнениях коэффициенты при поправках астрономических координат, азимутов, зенитных расстояний и длин линий выражаются формулами:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_n}{\partial \varphi_i} &= \frac{1}{M_n + H_n} [(N_n + H_n) \cos(L_n - \lambda_i) - (N_i + H_i) \times \\
& \times \sin B_n \sin B_i \cos(L_n - \lambda_i) - (N_i + H_i) \cos B_n \cos B_i \cos(L_i - \lambda_i) + \\
& + e^2 (N_i \sin B_i - N_n \sin B_n) \sin B_n \cos(L_n - \lambda_i)];
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial B_n}{\partial \lambda_i} = \frac{N_i + H_i}{M_n + H_n} \sin B_n \cos B_i \sin(L_n - L_i);$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_n}{\partial \alpha_{i,k}} &= \frac{1}{M_n + H_n} \{ - (N_n + H_n) \cos \varphi_i \sin(L_n - \lambda_i) + (N_i + H_i) \times \\
& \times [\cos B_i \cos B_n \cos \varphi_i \sin(L_i - \lambda_i) + \sin B_n \sin B_i \cos \varphi_i \sin(L_n - \lambda_i) -
\end{aligned}$$

$$- \sin B_n \cos B_i \sin \varphi_i \sin (L_n - L_i)] - e^2 (N_i \sin B_i - N_n \sin B_n) \times \\ \times \sin B_n \cos \varphi_i \sin (L_n - \gamma_i)];$$

$$\frac{\partial B_n}{\partial s_{i,k}} = \frac{N_i + H_i}{(M_n + H_n) s_{i,k}} [\sin B_n \cos B_i \cos (L_n - L_i) - \cos B_n \sin B_i + \\ + \frac{e^2}{N_i + H_i} \cos B_n (N_i \sin B_i - N_n \sin B_n)]; \quad (6)$$

$$Q_i^{i,k,n} = \frac{N_k + H_k}{M_n + H_n} [l_i (\sin B_k \sin B_n \sin L_n + \cos B_k \cos B_n \sin L_k) - \\ - m_i (\sin B_k \sin B_n \cos L_n + \cos B_k \cos B_n \cos L_k) - \\ - n_i \cos B_k \sin B_n \sin (L_n - L_k)] - \frac{N_i + H_i}{M_n + H_n} [l_i (\sin B_i \sin B_n \sin L_n + \\ + \cos B_i \cos B_n \sin L_i) - m_i (\sin B_i \sin B_n \cos L_n + \cos B_i \cos B_n \cos L_i) - \\ - n_i \cos B_i \sin B_n \sin (L_n - L_i)] + \frac{e^2}{M_n + H_n} (N_i \sin B_i - N_k \sin B_k) \times \\ \times (l_i \sin L_n - m_i \cos L_n) \sin B_n; \quad (7)$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial \varphi_i} = \sec B_n \sin (L_n - \lambda_i) \left[\sin B_n - \frac{N_i + H_i}{N_n + H_n} \sin B_i + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{N_n + H_n} (N_i \sin B_i - N_n \sin B_n) \right];$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial \lambda_i} = 1 - \frac{N_i + H_i}{N_n + H_n} \sec B_n \cos B_i \cos (L_n - L_i);$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial \alpha_{i,k}} = \sec B_n \left\{ \cos \varphi_i \sin B_n \cos (L_n - \lambda_i) - \sin \varphi_i \cos B_n + \right. \\ + \frac{N_i + H_i}{N_n + H_n} [\sin \varphi_i \cos B_i \cos (L_n - L_i) - \cos \varphi_i \sin B_i \cos (L_n - \lambda_i)] + \\ \left. + \frac{e^2}{N_n + H_n} (N_i \sin B_i - N_n \sin B_n) \cos \varphi_i \cos (L_n - \lambda_i) \right\}; \\ \frac{\partial L_n}{\partial s_{i,k}} = \frac{N_i + H_i}{(N_n + H_n) s_{i,k}} \sec B_n \cos B_i \sin (L_n - L_i); \quad (8)$$

$$Q_2^{i,k,n} = \frac{N_k + H_k}{N_n + H_n} \sec B_n [-\sin B_k (l_i \cos L_n + m_i \sin L_n) + \\ + n_i \cos B_k \cos (L_n - L_k)] - \frac{N_i + H_i}{N_n + H_n} \sec B_n [-\sin B_i (l_i \cos L_n + \\ + m_i \sin L_n) + n_i \cos B_i \cos (L_n - L_i)] - \frac{e^2 \sec B_n}{N_n + H_n} (N_i \sin B_i - \\ - N_k \sin B_k) (l_i \cos L_n + m_i \sin L_n); \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial \varphi_i} = (N_i + H_i) [\sin B_i \cos B_n \cos (L_n - \lambda_i) - \cos B_i \sin B_n \cos (L_i - \lambda_i)] - \\ - e^2 (N_i \sin B_i - N_n \sin B_n) \cos B_n \cos (L_n - \lambda_i); \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial \lambda_i} = -(N_i + H_i) \cos B_n \sin (L_n - L_i);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_n}{\partial \alpha_{i,k}} &= (N_i + H_i) [\sin B_n \cos B_i \cos \varphi_i \sin (L_i - \lambda_i) + \\ &+ \cos B_n \cos B_i \sin \varphi_i \sin (L_n - L_i) - \cos B_n \sin B_i \cos \varphi_i \sin (L_n - \lambda_i)] + \\ &+ e^2 (N_i \sin B_i - N_n \sin B_n) \cos B_n \cos \varphi_i \sin (L_n - \lambda_i), \\ \frac{\partial H_n}{\partial s_{i,k}} &= \frac{N_n + H_n}{s_{i,k}} - \frac{N_i + H_i}{s_{i,k}} [\cos B_i \cos B_n \cos (L_n - L_i) + \\ &+ \sin B_n \sin B_i] + \frac{e^2}{s_{i,k}} \sin B_n (N_i \sin B_i - N_n \sin B_n); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Q_3^{i,k,n} &= (N_k + H_k) [l_i (\cos B_k \sin B_n \sin L_k - \sin B_k \cos B_n \sin L_n) + \\ &+ m_i (\sin B_k \cos B_n \cos L_n - \cos B_k \sin B_n \cos L_k) + n_i \cos B_k \cos B_n \sin (L_n - L_k)] - \\ &- (N_i + H_i) [l_i (\cos B_i \sin B_n \sin L_i - \sin B_i \cos B_n \sin L_n) + \\ &+ m_i (\sin B_i \cos B_n \cos L_n - \cos B_i \sin B_n \cos L_i) + n_i \cos B_i \cos B_n \sin (L_n - L_i)] + \\ &+ e^2 (N_i \sin B_i - N_k \sin B_k) \cos B_n (m_i \cos L_n - l_i \sin L_n); \end{aligned} \quad (11)$$

$$l_i = \sin \lambda_i \cos \alpha_{i,k} - \sin \varphi_i \cos \lambda_i \sin \alpha_{i,k};$$

$$m_i = -\cos \lambda_i \cos \alpha_{i,k} - \sin \varphi_i \sin \lambda_i \sin \alpha_{i,k}; \quad (12)$$

$$n_i = \cos \varphi_i \sin \alpha_{i,k}.$$

Поправки астрономических координат и азимутов в вершинах ходовой линии должны быть заменены выражениями:

$$\delta \varphi_{10} = \left(\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial l_p} \delta l_p \right)_1; \quad \delta \lambda_{10} = \left(\frac{\partial \lambda_{10}}{\partial l_p} \delta l_p \right)_1;$$

$$\delta \varphi_6 = \left(\frac{\partial \varphi_6}{\partial l_p} \delta l_p \right)_2; \quad \delta \lambda_6 = \left(\frac{\partial \lambda_6}{\partial l_p} \delta l_p \right)_2;$$

$$\delta \alpha_{1,10} = \delta \alpha_{1,2} + \delta a_{1,2}^{2,8} + \delta a_{1,2}^{8,10};$$

$$\delta \alpha_{10,6} = \left(\frac{\partial \alpha_{10,6}}{\partial l_p} \delta l_p \right)_1 + \delta a_{10,6}^{1,8} + \delta a_{10,6}^{8,9} + \delta a_{10,6}^{6,9};$$

$$\delta \alpha_{6,5} = \left(\frac{\partial \alpha_{6,5}}{\partial l_p} \delta l_p \right)_2 + \delta a_{6,5}^{9,10} + \delta a_{6,5}^{5,9}.$$

Поправки δA_i^{jk} плоских углов следует с помощью известных формул выразить через поправки зенитных расстояний и горизонтальных углов. Система обозначений, принятая в настоящей статье, та же, что и в работе [2]. Индексы n и i в формулах (6) — (11) соответственно равны номерам конечной и текущей вершин ходовой линии. Заметим, что при любых значениях индексов j и k выполняются равенства

$$\frac{\partial P_n}{\partial s_{ij}} s_{ij} = \frac{\partial P_n}{\partial s_{ik}} s_{ik},$$

где $P_n = B_n, L_n, H_n$.

Для практического применения в относительно небольшой триангуляции формулы (6)—(11) можно упростить. Тем не менее сложность и громоздкость вычислений при составлении рассматриваемых уравнений в геодезических координатах вполне очевидны.

Условные уравнения жесткости направления стороны 1—2 превращаются в системе геодезических координат в уравнение геодезического азимута $A_{1,2}$ и в уравнение геодезического зенитного расстояния $Z_{1,2}$, являющиеся следствием условия Лапласа и условия связи между геодезическим и астрономическим зенитным расстоянием. С погрешностью порядка произведений величин $(\lambda_1 - L_1)$, $(\varphi_1 - B_1)$ на искомые поправки эти уравнения можно представить в следующем виде:

$$\delta\alpha_{1,2} - \operatorname{ctg} z_{1,2} \sin \alpha_{1,2} \delta\varphi_1 + (-\sin \varphi_1 + \operatorname{ctg} z_{1,2} \cos \alpha_{1,2} \cos \varphi_1) \delta\lambda_1 + (A'_{1,2} - A_{1,2}) = 0, \quad (13)$$

$$\delta z_{1,2} + \cos \alpha_{1,2} \delta\varphi_1 + \cos \varphi_1 \sin \alpha_{1,2} \delta\lambda_1 + (Z'_{1,2} - Z_{1,2}) = 0.$$

Здесь $A'_{1,2}$ и $Z'_{1,2}$ вычисляются по измеренным элементам с помощью формул

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \alpha_{1,2} - (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + [(\lambda_1 - L_1) \cos \varphi_1 \cos \alpha_{1,2} - \\ &\quad - (\varphi_1 - B_1) \sin \alpha_{1,2}] \operatorname{ctg} z_{1,2}, \\ Z_{1,2} &= z_{1,2} + (\varphi_1 - B_1) \cos \alpha_{1,2} + (\lambda_1 - L_1) \cos \varphi_1 \sin \alpha_{1,2}. \end{aligned} \quad (14)$$

В заключение отметим, что формулы (6), (8), (10) — это точные выражения частных производных от геодезических координат произвольного пункта пространственной триангуляции, рассматриваемой как жесткий полиэдр, по астрономическим координатам и астрономическому азимуту в исходном пункте и по длине выходной стороны. Они могут быть применены при введении поправок в геодезические координаты за наклон геодезической системы и за изменение масштаба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремеев В. Ф. и Юркина М. И. Некоторые вопросы обработки пространственных сетей. Труды ЦНИИГАиК, вып. 171. «Недра», М., 1966.
2. Филиппов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной триангуляции. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 7. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1967.

Работа поступила
6 декабря 1967 г.