

УДК 528.181.

В. Д. ШИПУЛИН

РАЗВИТИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ТЕНЗОРЕ КВАДРАТОВ ОШИБОК СОВОКУПНОСТИ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

Более глубокому пониманию механизма определения ошибок любых элементов геодезических сетей, по нашему мнению, будет способствовать следующая трактовка представлений о тензоре квадратов ошибок совокупности зависимых величин.

Исходным для последующих выводов является известное положение о том, что уравненные по способу косвенных определений прямоугольные координаты точек имеют в совокупности погрешность, которая наиболее полно описывается тензором M^2 квадратов ошибок указанных координат. Здесь необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. Если при уравнивании измеренных данных посредственными величинами являются декартовы ортогональные координаты, то и погрешность положения точек определяется тензором квадратов ошибок декартовых ортогональных координат.

Однако в геодезической практике положение точек может определяться углами, сторонами, диагоналями, приращениями координат и т. п. или, наконец, их различными комбинациями. Следовательно, принимая в качестве посредственных определений какие-либо из перечисленных величин, найдем, что погрешность положения точек опишется тензором квадратов ошибок этих же величин. В таком случае мы всегда сразу получаем тензор погрешности *положения точек*, определенных различными координатными системами.

Здесь термин «положение точек» применяется в более общем смысле, чем обычная ассоциация его с ортогональными декартовыми координатами. Например, измеренные длины сторон в трехлучевой пространственной засечке можно рассматривать как косоугольные координаты точки; в этом случае понятие «положение точки» необходимо связывать с косоугольными координатами. Поэтому в общем случае в t -мерном пространстве t необходимых измерений (однородных или неоднородных) задают положение точек в некоторой обобщенной системе координат. Такой смысл указанного понятия позволяет с единой точки зрения рассматривать тензор погрешности совокупности уравненных (зависимых) величин.

Принципиален вопрос о *пространстве* указанного тензора. Поскольку положение точек определяется числом t необходимых измерений (координат), следовательно, пространство тензора погрешности положения точек всегда t -мерно.

На основании изложенного приходим к заключению, что тензором второго ранга (второй валентности) можно характеризовать погрешность совокупности только t зависимых величин. Эти величины должны быть в совокупности лишь такими, которыми определяется поло-

жение точек — сторонами, углами, диагоналями, приращениями координат, различными их комбинациями и пр.

Указанные величины могут определять различные системы обобщенных координат, в которых погрешность положения точек будет описываться тензорами второго ранга различного типа. Для многих целей нам удобнее иметь дело лишь с афинными ортогональными тензорами. Каким образом можно прийти к такому положению? Ответ один: необходимо в уравнениях поправок

$$a_i \delta x + b_i \delta y + c_i \delta z + \dots + l_i = v_i \quad (1)$$

рассматривать сумму

$$a_i \delta x + b_i \delta y + c_i \delta z + \dots \quad (2)$$

как скалярное произведение векторов $\bar{r}$ и $\bar{g}_i$, заданных ортогональными проекциями в декартовой системе координат (здесь $\bar{r}$ — вектор смещения уравненного положения пунктов относительно приближенного, $\bar{g}_i$ — градиент измеренной функции). Тогда ввиду инвариантного характера тензоров погрешность положения точек будет характеризоваться одним афинным ортогональным тензором $M_{r_A}^2$.

Условимся отличать координатные системы, в которых определены компоненты тензора погрешности (иначе говоря, системы величин, определяющих положение точек), нижними индексами следующим образом:

$$M_{r_A}^2 \{A = (x, y, \dots)\}; M_{r_F}^2 \{F = (F_1, F_2, \dots)\}. \quad (3)$$

Знание тензора погрешности некоторых элементов, в совокупности характеризующих положение пунктов сети, позволяет определять ошибки любых элементов этой сети. Пути перехода от одной разновидности ошибок к другой можно ассоциировать с преобразованием компонент тензоров при переходе от одной системы координат к другой.

Известно, что преобразование афинного ортогонального тензора к новой системе ортогональных координат равносильно скалярному умножению его на тензор преобразования T слева и на сопряженный тензор T_C справа, т. е.

$$M_{r_{A'}}^2 = T_{AA'} \cdot M_{r_A}^2 \cdot T_{AA'C} \quad \{A = (x, y, \dots), A' = (x', y', \dots)\} \quad (4)$$

Здесь индексы AA' указывают, что $T_{AA'}$ — тензор преобразования из системы A в систему A' ; поэтому порядок их имеет значение. Подобными обозначениями условимся пользоваться и в дальнейшем.

Легко видеть, что аналогичным образом можно преобразовать тензор $M_{r_A}^2$ к системе зависимых величин, обозначаемых в общем случае $F_1, F_2, F_3, \dots$, т. е.

$$M_{r_F}^2 = T_{AF} \cdot M_{r_A}^2 \cdot T_{AF_C}, \quad \{A = (x, y, \dots), F = (F_1, F_2, \dots)\}. \quad (5)$$

Очевидно, что в общем случае преобразование

$$M_{r_\Phi}^2 = T_{F\Phi} \cdot M_{r_F}^2 \cdot T_{F\Phi_C} \quad \{F = (F_1, F_2, \dots), \Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots)\} \quad (6)$$

следует рассматривать как общий закон перехода от погрешности совокупности одних зависимых величин к погрешности других величин, в совокупности определяющих положение точек.

Чтобы подтвердить наше заключение, необходимо рассмотреть матричную форму любого из представленных преобразований, например (5).

Если выразить тензор T_{AF} составляющими его векторами $\bar{f}_i$, так что

$$T_{AF} = \bar{e}_1 \bar{f}_1 + \bar{e}_2 \bar{f}_2 + \dots + \bar{e}_3 \bar{f}_3, \quad (7)$$

то матрицу компонент тензора $M_{r_F}^2$ (5) можно представить в виде

$$\|M_{r_F}^2\| = \begin{vmatrix} \bar{f}_1 \cdot M_{r_A}^2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{f}_1 \cdot M_{r_A}^2 \cdot \bar{f}_2 & \dots & \bar{f}_1 \cdot M_{r_A}^2 \cdot \bar{f}_t \\ \bar{f}_2 \cdot M_{r_A}^2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \cdot M_{r_A}^2 \cdot \bar{f}_2 & \dots & \bar{f}_2 \cdot M_{r_A}^2 \cdot \bar{f}_t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{f}_t \cdot M_{r_A}^2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{f}_t \cdot M_{r_A}^2 \cdot \bar{f}_2 & \dots & \bar{f}_t \cdot M_{r_A}^2 \cdot \bar{f}_t \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Известно, что квадратами ошибок декартовых координат точек являются диагональные компоненты тензора $M_{r_A}^2$. На этом основании можно заключить, что и в выражении (8) диагональные компоненты тензора $M_{r_F}^2$ определяют ошибки величин, задающих положение точек, иначе говоря, определяют ошибки функций зависимых величин.

Это один путь нахождения ошибок функций зависимых величин. В работе [1] выражение ошибки функции зависимых величин

$$m_f^2 = \bar{f} \cdot M_{r_A}^2 \cdot \bar{f} \quad (9)$$

было получено иным путем. Тем самым подтверждается справедливость приведенных доказательств.

* * *

Остановимся теперь на определении тензора преобразования T , необходимого для выполнения действий вида (4), (5), (6).

Составляющие тензор T векторы являются градиентами функций зависимых величин. Следовательно, тензор преобразования T можно определить, если найдена функциональная зависимость между объектами, погрешность которых нас интересует, и величинами, тензор совокупной погрешности которых известен. Установление указанной функциональной зависимости играет поэтому решающую роль.

В общем виде установить необходимые функции зависимых величин довольно легко. Например, если имеется тензор $M_{r_A}^2 \{A = (x_1, x_2, \dots, x_t)\}$ погрешности положения точек, заданных ортогональными координатами $x_1, x_2, \dots, x_t$, то определяющими положение этих точек функциями указанных координат будут следующие:

$$F_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_t). \quad (10)$$

В том случае, когда положение точек определено посредством величин $F_1, F_2, \dots, F_t$, и, следовательно, известен тензор $M_{r_F}^2$, искомыми функциями могут быть

$$x_i = X_i(F_1, F_2, \dots, F_t) \quad (11)$$

или, вообще говоря,

$$\Phi_i = \varphi_i(F_1, F_2, \dots, F_t). \quad (12)$$

Вся трудность подчас заключается в установлении конкретных выражений для функций (11) и особенно (12). В работе [1] (глава 1, § 6, § 7) указаны приемы преодоления этих затруднений в некоторых частных случаях. Ниже предлагается следующее решение, которое может оказаться целесообразным во многих случаях и которое практически применимо к решению задачи в любом случае.

Любые из указанных выше функций легко выражаются посредством ортогональных декартовых координат, поэтому получение тензора T_{AF} для преобразования (5) не вызывает затруднений. Учитывая это, решим уравнение (5) относительно тензора $M_{r_A}^2$. С этой целью скалярно умножим обе части уравнения (5) слева на обратный тензор T_{AF}^{-1} и справа на сопряженный с ним тензор $T_{AF_C}^{-1}$, так что

$$T_{AF}^{-1} \cdot M_{r_F}^2 \cdot T_{AF_C}^{-1} = T_{AE}^{-1} \cdot T_{AF} \cdot M_{r_A}^2 \cdot T_{AF_C} \cdot T_{AF_C}^{-1}. \quad (13)$$

На основании ассоциативности скалярного произведения тензоров имеем

$$T_{AF}^{-1} \cdot T_{AF} = E, \quad T_{AF_C} \cdot T_{AF_C}^{-1} = E,$$

где E — единичный тензор. Следовательно,

$$M_{r_A}^2 = T_{AF}^{-1} \cdot M_{r_F}^2 \cdot T_{AF_C}^{-1}. \quad (14)$$

Таким образом представлен сравнительно простой способ преобразования тензора погрешности положения пунктов, заданного в системе величин $F_1, F_2, \dots, F_t$, к системе ортогональных координат $x_1, x_2, \dots, x_t$. В самом деле, чтобы произвести прямым путем преобразование

$$M_{r_A}^2 = T_{FA} \cdot M_{r_F}^2 \cdot T_{FA_C}, \quad (15)$$

необходимо знать тензор T_{FA} , определение которого по формулам (11) вызовет большие затруднения. Предлагаемым способом предусматривается образование вначале тензора T_{AF} по функциям (10) и затем T_{AF}^{-1} . Согласно (15) и (14) имеем

$$T_{FA} = T_{AF}^{-1}. \quad (16)$$

Далее указанное преобразование выполняется по формуле (14). Составление используемых здесь функций вида (10) в геодезической практике не вызывает затруднений.

Используя изложенный способ практически можно осуществить любое преобразование тензора погрешности положения точек, определенного в некоторой системе зависимых величин $F_1, F_2, \dots, F_t$, к системе вообще любых зависимых величин $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_t$, в совокупности определяющих положение точек по формуле (6).

Обратное действие выполнимо по формуле.

$$M_{r_F}^2 = T_{\Phi F} \cdot M_{r_\Phi}^2 \cdot T_{\Phi F_C}. \quad (17)$$

Следовательно, если известен тензор квадратов ошибок совокупности некоторых величин, то всегда можно определить ошибки любых других зависимых величин.

Для выполнения действий (6), (17) необходимо посредством функций (10) от ортогональных декартовых координат образовать тензоры

$$T_{F\Phi} = T_{AF} \cdot T_{AF}^{-1}, \quad T_{\Phi F} = T_{AF} \cdot T_{AF}^{-1}. \quad (18)$$

Ясно, что

$$T_{F\Phi}^{-1} = T_{\Phi F}, \quad (19)$$

так как

$$(T_{F\Phi})^{-1} = (T_{A\Phi} \cdot T_{AF}^{-1})^{-1} = T_{AF} \cdot T_{A\Phi}^{-1}. \quad (20)$$

Аналогично получим

$$T_{F\Phi} = T_{\Phi F}^{-1}. \quad (21)$$

Подобным образом решается рассматриваемый вопрос и в случае неоднородных систем величин, принимаемых в качестве координат.

Теперь практически можно получать ошибки любых функций от функций зависимых величин, так как последние определяют единственный для конкретных условий тензор погрешности положения точек.

Такowo в сущности все изложение наших представлений о тензоре квадратов ошибок совокупности уравненных (зависимых) величин.

Основное значение изложенного способа заключается в том, что он позволяет с единой точки зрения подходить к вопросам оценки точности геодезических определений, ранее рассматривавшихся изолированно.

* * *

Необходимо сделать еще некоторые замечания.

Прежде всего отметим, что нет принципиального различия между тем, каким из известных способов получена ошибка зависимого элемента, так как в любом случае она должна быть одинаковой по величине для определенных условий. Применение того или иного способа для указанных целей, предопределяется экономической целесообразностью. Тем не менее в свете настоящей трактовки вопроса тензором можно описать погрешность положения пунктов только в t -мерном пространстве. Поэтому тензор M_{rF}^2 , полученный посредством результатов уравнивания способом косвенных измерений, должен быть равен тензору M_{rF}^2 , образованному посредством результатов уравнивания способом условных измерений.

Необходимо учесть, что диагональные и корреляционные компоненты тензора M_{rF}^2 вычисляются при уравнивании методом условных измерений по известным формулам:

$$m_{ii}^2 = m \left\{ [f_i f_i] - \frac{[a f_i]^2}{[a a]} - \frac{[b f_i \cdot 1]^2}{[b b \cdot 1]} - \dots - \frac{[r f_i \cdot (r-1)]^2}{[r r \cdot (r-1)]} \right\}; \quad (22)$$

$$m_{ij}^2 = m \left\{ [f_i f_j] - \frac{[a f_i][a f_j]}{[a a]} - \frac{[b f_i \cdot 1][b f_j \cdot 1]}{[b b \cdot 1]} - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{[r f_i \cdot (r-1)][r f_j \cdot (r-1)]}{[r r \cdot (r-1)]} \right\} \quad (23)$$

При уравнивании геодезической сети способом условных измерений оценка точности координат пунктов обычно вызывает известные трудности. Теперь, применяя вышеизложенный прием, погрешность координат пунктов легко определить. Для этого следует получить компоненты тензора M_r^2 в системе элементов, ошибки которых довольно просто вычислимы по формулам (22), (23). Такими элементами могут

быть углы или стороны. После чего достаточно выполнить преобразование (14).

В ряде случаев нас может интересовать не полный тензор погрешности положения пунктов в t -мерном пространстве, а только часть его в подпространстве k -мерном. Будем иметь в виду, что матрица тензора второго ранга всегда квадратная и имеет в нашем случае t^2 компонент. Рассмотрим, например, преобразование, позволяющее перейти от пространства $t=3$ измерений к пространству $k=2$ измерений. В этом случае можно считать, что один из составляющих тензор T векторов является нуль-вектором. Тогда преобразованию, например, (15) соответствует в матричной форме выражение

$$\|M_{rA}^2\| = \begin{vmatrix} f_{x1} & f_{x2} & f_{x3} \\ f_{y1} & f_{y2} & f_{y3} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_{F_1F_1}^2 & m_{F_1F_2}^2 & m_{F_1F_3}^2 \\ m_{F_2F_1}^2 & m_{F_2F_2}^2 & m_{F_2F_3}^2 \\ m_{F_3F_1}^2 & m_{F_3F_2}^2 & m_{F_3F_3}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{x1} & f_{y1} & 0 \\ f_{x2} & f_{y2} & 0 \\ f_{x3} & f_{y3} & 0 \end{vmatrix}, \quad (24)$$

откуда

$$\|M_{rA}^2\| = \begin{vmatrix} m_{xx}^2 & m_{xy}^2 & 0 \\ m_{xy}^2 & m_{yy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Этим самым подчеркнем, что использование неполного тензора (25) для дальнейшего определения ошибок функций от t -функций зависимых величин непозволительно, так как при этом нарушается строгость решения задачи без учета всех t^2 компонент.

Однако в том случае, когда необходимо определить ошибку функций от k -функций зависимых величин при $k < t$, достаточно иметь ошибки последних и их корреляционные ошибки, а не полный t -мерный тензор квадратов ошибок. Это положение становится ясным, если рассмотреть его на примере

Пример. Пусть при $t=3$ и $k=2$ имеем $M_{rF}^2 \{F=(F_1, F_2, F_3)\}$. Требуется получить ошибку функции $\Phi=\Phi(F_1, F_2)$. Понятно, что градиент этой функции имеет в 3-мерном пространстве проекции

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} = \varphi_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial F_3} = 0.$$

Тогда по общим правилам найдем

$$m_{\Phi}^2 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_{F_1F_1}^2 & m_{F_1F_2}^2 & m_{F_1F_3}^2 \\ m_{F_2F_1}^2 & m_{F_2F_2}^2 & m_{F_2F_3}^2 \\ m_{F_3F_1}^2 & m_{F_3F_2}^2 & m_{F_3F_3}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (26)$$

или

$$m_{\Phi}^2 = \varphi_1^2 m_{F_1F_1}^2 + 2\varphi_1\varphi_2 m_{F_1F_2}^2 + \varphi_2^2 m_{F_2F_2}^2. \quad (27)$$

Поэтому мы вправе считать, что

$$m_{\Phi}^2 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_{F_1E_1}^2 & m_{F_1E_2}^2 \\ m_{F_2E_1}^2 & m_{F_2E_2}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Результат (27) согласуется с формулой, полученной для этого случая классическим путем.

Укажем еще, что не может быть $k > t$, так как невозможно в этом случае составить однозначную конкретную функцию от k зависимых величин, отвечающую реальному смыслу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордеев Ю. А. Обобщение приемов оценки точности положения пунктов ~~пл~~афовых опорных геодезических сетей. Ученые записки ЛВИМУ имени адмирала Макарова, вып. 15. «Морской транспорт», Л., 1959.
2. Шипулин В. Д. К вопросу о векторном и тензорном представлении уравнивания геодезических измерений. Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 4. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1966.

Работа поступила
23 мая 1967 г.