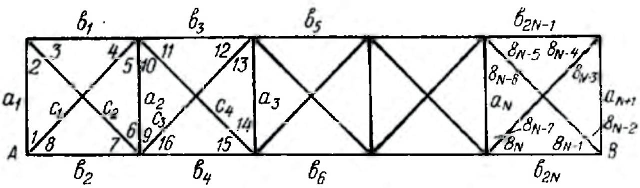
В. П. НОВОСЕЛЬСКАЯ

ТОЧНОСТЬ ЦЕПИ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

В настоящее время в практику геодезии широко внедряются физические методы определения расстояний. Это позволяет строить опорные геодезические сети методом линейных и линейно-угловых триангуляций.

В СССР и за рубежом появилось много работ, посвященных вопросам построения и уравнивания линейных и линей-



но-угловых триангуляций. Изучению распределения погрешностей в этих сетях посвящены работы [1—5].

Ниже изучается вопрос о распределении погрешностей в цепи геодезических квадратов линейно-угловой триангуляции.

В свободном ряду геодезических квадратов линейно-угловой триангуляции при уравнивании по методу условных измерений возникает $3N$ условных уравнений фигур (N — число квадратов в цепи) вида

$$(8i-7)+(8i-6)+(8i-5)+(8i-4)+w_{i,1}=0, \quad (1)$$

$$(8i-3)+(8i-2)+(8i-1)+(8i)+w_{i,2}=0, \quad (2)$$

$$(8i-5)+(8i-4)+(8i-3)+(8i-2)+w_{i,3}=0 \quad (3)$$

и $6N$ уравнений сторон вида

$$\delta_{8i-7}(8i-7)-\delta_{8i-4}(8i-4)+(\lg a_i)-(\lg b_{2i-1})+ \\ + w_{i,4}=0, \quad (4)$$

$$-\delta_{8i-7}(8i-7)+(\lg b_{2i-1})-(\lg c_{2i-1})+w_{i,5}=0, \quad (5)$$

$$\delta_{8i-3}(8i-3)-\delta_{8i}(8i)+(\lg a_{i+1})-(\lg b_{2i})\ w_{i,6}=0, \quad (6)$$

$$-\delta_{8i-3}(8i-3)+(\lg b_{2i})-(\lg c_{2i-1})+w_{i,7}=0, \qquad (7)$$

$$-\delta_{8i-5}(8i-5)+(\lg a_{i+1})-(\lg c_{2i})+w_{i,8}=0, \qquad (8)$$

$$-\delta_{8i-2}(8i-2)+(\lg b_{2i-1})-(\lg c_{2i})+w_{i,9}=0, \qquad (9)$$

где i — порядковый номер геодезического квадрата; $(8i)$, $(\lg a)$, $(\lg b)$, $(\lg c)$ — вероятнейшие поправки к измеренным углам и логарифмам длин сторон; δ — приращение логарифма синуса угла при изменении угла на $1''$ (для равнобедренного прямоугольного треугольника $\delta_{45^\circ}=2{,}11$, $\delta_{90^\circ}=0$); w — свободные члены условных уравнений.

Весовые функции запишем следующим образом.

Для азимута α_i связующей стороны квадрата с номером $i-1$

$$d\alpha_i=+(1)-(5)+(9)-(13)+\ldots+(8i-7)-(8i-3), \qquad (10)$$

для длины диагонали AB (продольный сдвиг)

$$(i\cdot 10^6\mu)\frac{dL}{L}=(\lg b_2)+(\lg b_4)+(\lg b_6)+\ldots+(\lg b_{2i}), \qquad (11)$$

для направления той же диагонали AB (поперечный сдвиг).

$$i\cdot dT''=i(1)+(i-1)(6)+(i-1)(7)+i(8)+(i-1)(9)+\ldots+$$
$$+(8i-2)+(8i-1). \qquad (12)$$

Вероятнейшие поправки к измеренным углам и сторонам должны удовлетворять известному условию:

$$\left[\frac{v_\beta^2}{m_\beta^2}\right]+\left[\frac{v_S^2}{m_S^2}\right]=\min, \qquad (13)$$

где v_β и v_S — вероятнейшие поправки к измеренным углам и сторонам, m_β и m_S — соответствующие средние квадратические ошибки измеренных величин.

Как показал К. Л. Проворов [4], условие (13) приводится к виду

$$\frac{1}{m_\beta^2}\left\{[v_\beta^2]+\frac{1}{q}[v_{\lg S}^2]\right\}=\min,$$

где $v_{\lg S}$ — вероятнейшие поправки к логарифмам измеренных сторон;

$$q=\frac{1}{P_{\lg S}}=\left(\frac{10^6\mu\cdot m_S}{m_\beta\cdot S}\right)^2.$$

Следовательно, при уравнивании можно принять $P_\beta=1$; $P_{\lg S}=\frac{1}{q}$.

С целью сокращения вычислений применим двухгрупповой метод решения нормальных уравнений. В первую группу отнесем уравнения фигур вида (1) и (2), во вторую — все остальные условные уравнения. Преобразованные коэффициенты второй группы будем вычислять по формулам:

$$a' = a - \frac{[a]}{4} \quad \text{(при поправках в углы)},$$

$$a' = a\sqrt{q} \quad \text{(при поправках в стороны)},$$

где a — непреобразованный коэффициент условного уравнения, a' — коэффициент, преобразованный за условия первой группы, $[a]$ — сумма непреобразованных коэффициентов в данном треугольнике.

В уравнениях сторон вида (4), (6) сумма коэффициентов для каждого треугольника равна нулю. Следовательно, коэффициенты этих уравнений после преобразований не изменятся. Коэффициенты в весовых функциях (10), (11), (12) можно оставить непреобразованными, а для получения коэффициентов нормальных уравнений воспользоваться следующими известными зависимостями:

$$[a'b'] = [a'b],$$

$$[a'a'] = [aa] - \frac{1}{4}[a]^2.$$

Разместим преобразованные условные уравнения второй группы в следующем порядке: сначала все уравнения фигур (3), за ними уравнения сторон (4) всей сети, затем (5) и т. д. и после них весовые функции. Обозначим коэффициенты условных уравнений фигур (3) через a, уравнений сторон (4) через b, уравнений (5), (6), (7), (8), (9) — соответственно через c, d, l, h, j. Коэффициенты в весовых функциях обозначим через f_α, f_L, f_T.

По преобразованным условным уравнениям второй группы и весовым функциям найдем коэффициенты нормальных уравнений:

$$[a_i a_i] = +2, \quad [b_i b_i] = [d_i d_i] = +2(\delta^2 + q),$$

$$[c_i c_i] = [l_i l_i] = [h_i h_i] = [j_i j_i] = +0{,}75\,\delta^2 + 2q,$$

$$[a_i b_i] = -\delta, \quad [a_i c_i] = +0{,}5\,\delta, \quad [a_i d_i] = +\delta,$$

$$[a_i l_i] = [a_i h_i] = [a_i j_i] = -0{,}5\,\delta, \quad [b_i c_i] = [d_i l_i] = -(\delta^2 + q),$$

$$[c_i j_i] = [l_i h_i] = -0{,}25\,\delta^2, \quad [b_i h_i] = -q,$$

$$[c_i l_i] = [c_i h_i] = [d_i j_i] = [h_i j_i] = +q,$$

для всех вышеприведенных коэффициентов $i = 1, 2, 3, \ldots, N$;

$$[b_{i+1}d_i] = [b_{i+1}j_i] = +q, \quad i = 1,2,3,\ldots,(N-1),$$

$$[f_\alpha f_\alpha] = \frac{3}{2}N, \quad [f_L f_L] = qN,$$

$$[f_T f_T] = \frac{N}{4}(2N^2 + N + 3).$$

$$[a_i f_\alpha] = -1, \; [b_i f_\alpha] = +\delta, \; [c_i f_\alpha] = -0{,}75\,\delta, \; [d_i f_\alpha] = -\delta,$$

$$[l_i f_\alpha] = +0{,}75\,\delta, \; [h_i f_\alpha] = -0{,}25\,\delta, \; [j_i f_\alpha] = +0{,}25\,\delta,$$

$$[d_i f_L] = -q, \; [l_i f_L] = +q,$$

$$[a_i f_T] = -(N - i + 1), \; [b_i f_T] = +\delta\,(N - i + 1),$$

$$[c_i f_T] = -0{,}75\,\delta\,(N - i + 1), \; [d_i f_T] = -\delta(N - i + 1),$$

$$[l_i f_T] = 0{,}5\,(N-1) + 0{,}25\,\delta\,(N - i + 1),$$

$$[h_i f_T] = -0{,}25\,\delta(N-1) + 0{,}25\,\delta\,(N - i + 1),$$

$$[j_i f_T] = 0{,}25\,\delta\,(N - i + 1),$$

где $i = 1, \; 2, \; 3, \; \ldots, \; N$.

Из решения нормальных уравнений получим квадратичные коэффициенты эквивалентной системы. Для уравнений (3), (4), (5) имеем:

$$[a_i a_i (i-1)] = +2, \; [b_i b_i (N + i - 1)] = 1{,}5\,\delta^2 + 2q,$$

$$[c_i c_i (2N + i - 1)] = 0{,}25\,\delta^2 + 2q = R.$$

Несколько сложнее определяются коэффициенты последующих уравнений. Так, для уравнений (6) первые коэффициенты найдем следующим образом:

$$[d_1 d_1 \cdot 3N] = \frac{Q}{(1{,}5\delta^2 + 2q)R},$$

$$[d_2 d_2 (3N + 1)] = \frac{Q^2 - 0{,}25\delta^4 q^2 R^2}{(1{,}5\delta^2 + 2q)RQ},$$

$$[d_3 d_3 (3N + 2)] = \frac{Q(Q^2 - 0{,}5\delta^4 q^2 R^2)}{(1{,}5\delta^2 + 2q)(Q^2 - 0{,}25\delta^4 q^2 R^2)R},$$

где $Q = 4q^3 + 41{,}7383q^2 + 89{,}1947q + 44{,}1220$.

Для вычисления остальных коэффициентов уравнений (6) лучше воспользоваться общим правилом. Обозначая подходящую дробь через $A_i = \dfrac{B_i}{C_i}$, получим

$$B_i = QB_{i-1} - 0{,}25\,\delta^4 q^2 R^2 B_{i-2},$$

$$C_i = (1{,}5\,\delta^2 + 2q)\,R \cdot B_{i-1}.$$

Следовательно,

$$[d_i d_i\cdot(3N+i-1)]=\frac{QB_{3N+i-2}-0{,}25\delta^4 q^2R^2B_{3N+i-3}}{(1{,}5\delta^2+2q)RB_{3N+i-2}},$$

где $i=4,\ 5,\ ...,\ N$.

Для уравнений (7) первый квадратичный коэффициент эквивалентной системы вычислим по формуле

$$[l_i l_i\cdot 4N]=0{,}625\,\delta^2+2q-\frac{0{,}0625\delta^4}{1{,}5\delta^2+2q}-\frac{q^2}{R}-$$

$$-\frac{K^2RQ}{(1{,}5\delta^2+2q)(Q^2-0{,}25\delta^4q^2R^2)},$$

где $K=\delta^4+3\delta^2q+2q^2$.

Все последующие квадратичные коэффициенты уравнений (7) стремятся к пределу, величина которого может быть найдена из уравнения

$$[l_i l_i\cdot(4N+i-1)]=[l_1 l_1\cdot 4N]-\frac{0{,}25q^4K^2}{Q^2[l_1 l_1\cdot 4N]},$$

где $i=2,\ 3,\ 4,\ ...,\ N$.

Формула, позволяющая вычислять квадратичные коэффициенты уравнений (8), имеет вид

$$[h_i h_i\cdot(5N+i-1)]=0{,}625\delta^2+2q-\frac{(0{,}25\delta^2+q)^2}{(1{,}5\delta^2+2q)}-$$

$$-\frac{0{,}25q^2}{R}-\frac{\delta^4R(0{,}5\delta^2+q)^2}{(1{,}5\delta^2+2q)Q}-\frac{M^2}{[l_1l_1\cdot 4N]},$$

где

$$M=-0{,}375\,\delta^2-\frac{0{,}25\delta^2(0{,}25\delta^2+q)}{(1{,}5\delta^2+2q)}-\frac{0{,}5q^2}{R}+\frac{\delta^2KR(0{,}5\delta^2+q)}{(1{,}5\delta^2+2q)Q},$$

$i=1,\ 2,\ ...,\ N$.

Заметим, что при разных i коэффициенты уравнений (8) получаются разные. Однако это различие очень незначительно и практически не влияет на величину обратного веса.

СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА АЗИМУТА КОНЕЧНОЙ СТОРОНЫ ТРИАНГУЛЯЦИОННОЙ ЦЕПИ

Определим неквадратичные коэффициенты эквивалентной системы нормальных уравнений. Для уравнений (3), (4), (5) и весовой функции азимута имеем:

$$[a_i f_\alpha\cdot(i-1)]=-1,\quad [b_i f_\alpha\cdot(N+i-1)]=+0{,}5\,\delta,$$

$$[c_i f_\alpha\cdot(2N+i-1)]=-0{,}25\,\delta.$$

Далее

$$\frac{[a_i f_\alpha \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]} = -0{,}5, \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{[a_i f_\alpha \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]} = -0{,}5N. \tag{14}$$

$$\frac{[b_i f_\alpha \cdot (N+i-1)]^2}{[b_i b_i \cdot (N+i-1)]} = -\frac{0{,}25\delta^2}{1{,}5\delta^2+2q},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{[b_i f_\alpha \cdot (N+i-1)]^2}{[b_i b_i \cdot (N+i-1)]} = -\frac{0{,}5565}{q+3{,}3391} N. \tag{15}$$

$$\frac{[c_i f_\alpha \cdot (2N+i-1)]^2}{[c_i c_i \cdot (2N+i-1)]} = -\frac{0{,}0625\delta^2}{R},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{[c_i f_\alpha \cdot (2N+i-1)]^2}{[c_i c_i \cdot (2N+i-1)]} = -\frac{0{,}1855}{q+0{,}7420} N. \tag{16}$$

Найдем коэффициенты эквивалентной системы уравнений (6) и весовой функции азимута

$$[d_1 f_\alpha \cdot 3N] = -\frac{x}{(1{,}5\delta^2+2q)R}.$$

$$[d_2 f_\alpha \cdot (3N+1)] = -\frac{x}{(1{,}5\delta^2+2q)R} \cdot \frac{Q+0{,}5\delta^2 qR}{Q},$$

$$[d_3 f_\alpha \cdot (3N+2)] = -\frac{x}{(1{,}5\delta^2+2q)R} \cdot \frac{Q}{(Q-0{,}5\delta^2 qR)}.$$

Как видно из трех приведенных коэффициентов, первый сомножитель $-\frac{x}{(1{,}5\delta^2+2q)R}$, где $x = (\delta^3 + 1{,}5\delta q)\ (R - 0{,}1875q)$, общий для всех сумм. Если обозначим второй сомножитель $\frac{\alpha}{\beta}$, то он получается по формуле

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{B_{i-1} + 0{,}5\delta^2 qR \cdot \alpha_{i-1}}{B_{i-1}}. \tag{17}$$

Следовательно,

$$[d_i f_\alpha \cdot (3N+i-1)] = -\frac{x}{(1{,}5\delta^2+2q)R} \times$$

$$\times \frac{B_{3N+i-2} + 0{,}5\delta^2 qR \cdot \alpha_{3N+i-2}}{B_{3N+i-2}},$$

где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$.

$$\frac{[d_i f_\alpha\cdot(3N+i-1)]^2}{[d_i d_i(3N+i-1)]} = -\frac{x^2}{(1{,}5\delta^2+2q)R}\times$$

$$\times\frac{(B_{3N+i-2}+0{,}5\delta^2 qR\cdot a_{3N+i-2})^2}{(QB^2_{3N+i-2}-0{,}25\delta^4 q^2R^2\cdot B_{3N+i-2}\cdot B_{3N+i-3})}.$$

Суммируя N членов $\frac{[d_i f_\alpha(3N+i-1)]^2}{[d_i d_i(3N+i-1)]}$, получим дробь $\frac{Q(q)}{P(q)}$; находим корни знаменателя $P(q)$ и раскладываем дробь $\frac{Q(q)}{P(q)}$ на элементарные дроби; проведя преобразования и сокращения, найдем

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{[d_i f_\alpha\cdot(3N+i-1)]^2}{[d_i d_i(3N+i-1)]} = -\left(+\frac{0{,}0378}{q+3{,}3391}+\frac{1{,}1585}{q+0{,}7420}+\right.$$

$$\left.+\frac{1{,}2432}{q+7{,}7366}-\frac{1{,}0149}{q+0{,}7214}+\frac{0{,}0133}{q+1{,}9766}\right)N. \qquad (18)$$

Первый коэффициент эквивалентной системы уравнений (7) и весовой функции азимута определим по формуле

$$[l_1 f_\alpha\cdot 4N] = +0{,}5\delta+\frac{0{,}125\delta^3}{1{,}5\delta^2+2q}+\frac{0{,}25\delta q}{R}-$$

$$-\frac{xK}{(1{,}5\delta^2+2q)(Q-0{,}5\delta^2 qR)}.$$

Все последующие коэффициенты эквивалентной системы этого вида уравнений стремятся к пределу, величина которого может быть вычислена из выражения

$$[l_i f_\alpha\cdot(4N+i-1)] = [l_1 f_\alpha\cdot 4N]-\frac{0{,}5q^2K}{Q}\cdot\frac{[l_1 f_\alpha\cdot 4N]}{[l_1 l_1\cdot 4N]},$$

где $i=2,\ 3,\ \dots,\ N$.

Суммируя N членов $\frac{[l_i f_\alpha\cdot(4N+i-1)]^2}{[l_i l_i\cdot(4N+i-1)]}$ и произведя преобразования, получим

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{[l_i f_\alpha\cdot(4N+i-1)]^2}{[l_i l_i\cdot(4N+i-1)]} = -\left(-\frac{0{,}0734}{q+3{,}3391}-\frac{0{,}0388}{q+0{,}7420}+\right.$$

$$\left.+\frac{0{,}9275}{q+6{,}0865}+\frac{6{,}7451}{(q+6{,}0865)^2}\right)N. \qquad (19)$$

Коэффициенты эквивалентной системы уравнений (8), (9) и весовой функции азимута равны нулю

$$[h_i f_\alpha\cdot(5N+i-1)] = 0,\ [j_i f_\alpha(6N+i-1)] = 0.$$

Зная величины $[f_\alpha f_\alpha]$, (14), (15), (16), (18), получим приближенную формулу обратного веса $\frac{1}{P_\alpha}$:

$$\frac{1}{P_\alpha} = \left(1 - \frac{0{,}5209}{q+3{,}3391} - \frac{1{,}3052}{q+0{,}7420} - \frac{1{,}2432}{q+7{,}7366} + \frac{1{,}0149}{q+0{,}7214} - \right.$$

$$\left. - \frac{0{,}0133}{q+1{,}9766} - \frac{0{,}9275q+12{,}3903}{(q+6{,}0865)^2}\right) N. \qquad (20)$$

Переходя к средней квадратической ошибке уравненного азимута с учетом принятой ошибки единицы веса, найдем

$$m''_\alpha = m \sqrt{\left(1 - \frac{0{,}5209}{q+3{,}3391} - \frac{1{,}3052}{q+0{,}7420} - \frac{1{,}2432}{q+7{,}7366} + \frac{1{,}0149}{q+0{,}7214} - \right.}$$

$$\overline{\left. - \frac{0{,}0133}{q+1{,}9766} - \frac{0{,}9275q+12{,}3903}{(q+6{,}0865)^2}\right) N}.$$

Обратный вес $\frac{1}{P_\alpha}$ вместо формулы (20) с достаточной точностью можно вычислять по следующей эмпирической формуле:

$$\frac{1}{P_\alpha} = N - \frac{1{,}6695N}{q+3{,}3391} - \frac{0{,}5565N}{q+0{,}7420}. \qquad (21)$$

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ ТРИАНГУЛЯЦИОННОГО РЯДА

Определим неквадратичные коэффициенты эквивалентной системы нормальных уравнений. Для уравнений (3), (4), (5) и весовой функции длины диагонали ряда коэффициенты эквивалентной системы равны

$$[a_i f_L \cdot (i-1)] = 0, \quad [b_i f_L \cdot (N+i-1)] = 0,$$

$$[c_i f_L \cdot (2N+i-1)] = 0.$$

Для уравнения (6) и весовой функции длины диагонали ряда будут следующие коэффициенты эквивалентной системы:

$$[d_1 f_L \cdot 3N] = -q,$$

$$[d_2 f_L \cdot (3N+1)] = -q\,\frac{Q+0{,}5\delta^2 qR}{Q},$$

$$[d_3 f_L \cdot (3N+2)] = -q\,\frac{Q}{Q-0{,}5\delta^2 qR}.$$

Как видно из первых трех приведенных коэффициентов эквивалентной системы, первый сомножитель q — общий для всех сумм. Второй сомножитель найдем по формуле (17) Тогда

$$[d_i f_L \cdot (3N+i-1)] = -q\,\frac{(B_{3N+i-2}+0{,}5\delta^2 qR \cdot a_{3N+i-2}}{B_{3N+i-2}},$$

где $i=1,\ 2,\ 3\ \ldots,\ N$.

Таким образом

$$\frac{[d_i f_L \cdot (3N+i-1)]^2}{[d_i d_i \cdot (3N+i-1)]} = -$$

$$-q^2R(1{,}5\delta^2+2q)\,\frac{(B_{3N+i-2}+0{,}5\delta^2 qR \cdot a_{3N+i-2})^2}{QB^2_{3N+i-2}-0{,}25\delta^4 q^2R^2 B_{3N+i-2}\cdot B_{3N+i-3}}.$$

Суммируя N членов $\frac{[d_i f_L \cdot (3N+i-1)]^2}{[d_i d_i \cdot (3N+i-1)]}$ и произведя преобразования, получим:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{[d_i f_L \cdot (3N+i-1)]^2}{[d_i d_i \cdot (3N+i-1)]} = -\Big(0{,}75q - 4{,}7652 +$$

$$+\frac{34{,}1728}{q+7{,}7366}+\frac{0{,}0025}{q+0{,}7214}+\frac{0{,}6815}{q+1{,}9766}\Big)N. \qquad (22)$$

Первый коэффициент эквивалентной системы уравнений (7) и весовой функции длины диагонали ряда определим по формуле

$$[l_1 f_L \cdot 4N] = \frac{q(Q-0{,}5\delta^2 qR)-KRq}{Q-0{,}5\delta^2 qR}.$$

Все последующие коэффициенты эквивалентной системы уравнений (7) стремятся к пределу, величина которого может быть найдена из выражения

$$[l_i f_L \cdot (4N+i-1)] = \frac{q(Q-0{,}5\delta^2 qR)-KRq}{Q-0{,}5\delta^2 qR} -$$

$$-\frac{0{,}5\delta^2 K}{Q}\cdot\frac{[l_1 f_L \cdot 4N]}{[l_1 l_1 \cdot 4N]},$$

где $i=2,\ 3,\ \ldots,\ N$.

Суммируя N членов $\frac{[l_i f_L \cdot (4N+i-1)]^2}{[l_i l_i \cdot (4N+i-1)]}$, после преобразований получим

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{[l_i f_L \cdot (4N+i-1)]^2}{[l_i l_i \cdot (4N+i-1)]} = -\Big(0{,}1071q + 0{,}8769 -$$

$$-\frac{8{,}7568}{q+7{,}7366}-\frac{0{,}0166}{q+0{,}7214}+\frac{0{,}1180}{q+1{,}9766}+\frac{0{,}1868}{q+0{,}8559}\Big)N. \qquad (23)$$

Первый коэффициент эквивалентной системы уравнений (8) и весовой функции длины диагонали ряда вычислим по формуле:

$$[h_1 f_L \cdot 5N] = \frac{\delta^2 qR(0{,}5\delta^2+q)}{(Q-0{,}5\delta^2 qR)} + \frac{q(Q-0{,}5\delta^2 qR)-KRq}{Q-0{,}5\delta^2 qR} \times$$

$$\times \frac{(0{,}625\delta^2+q)\delta^2 RQ+(0{,}75\delta^2+q^2+q^3)Q-(0{,}5\delta^2+}{6{,}9888(q^6+19{,}7149q^5+124{,}7975q^4+347{,}6079q^3+455{,}2975q^2+}$$

$$\frac{+q)\delta^2 KR^2}{+261{,}5576q+52{,}1436)}.$$

При $\frac{m_S}{m \cdot s} = 1:300\,000-1:500\,000$ все последующие $\frac{[h_i f_L(5N+i-1)]^2}{[h_i h_i(5N+i-1)]}$ с точностью до 0,0001 равны $\frac{[h_1 f_L \cdot 5N]^2}{[h_1 h_1 \cdot 5N]}$. При $\frac{m_S}{m \cdot S} = 1:200\,000$ величины $\frac{[h_i f_L \cdot (5N+i-1)]^2}{[h_i h_i \cdot (5N+i-1)]}$ отличаются от $\frac{[h_1 f_L \cdot 5N]^2}{[h_1 h_1 \cdot 5N]}$ в единицах третьего знака. Следовательно, и в этом случае можно принять, что $\frac{[h_i f_L \cdot (5N+i-1)]^2}{[h_i h_i \cdot (5N+i-1)]} = \frac{[h_1 f_L \cdot 5N]^2}{[h_1 h_1 \cdot 5N]}$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{[h_i f_L \cdot (5N+i-1)]^2}{[h_i h_i \cdot (5N+i-1)]} = -\left(0{,}0170q + 0{,}3290 - \frac{0{,}9583}{q+3{,}3391} - \right.$$

$$\left. - \frac{1{,}2423}{q+7{,}7366} + \frac{0{,}0011}{q+0{,}7214} + \frac{0{,}3523}{q+1{,}9766}\right) N. \qquad (24)$$

Для уравнений (9) и весовой функции длины диагонали ряда имеем:

$$\frac{[j_i j_i \cdot (6N+i-1)]^2}{[j_i j_i \cdot (6N+i-1)]} = 0, \text{ при } \frac{m_S}{m \cdot S} = 1:300\,000 - 1:500\,000,$$

$$\frac{[j_i f_L \cdot (6N+i-1)]^2}{[j_i j_i \cdot (6N+i-1)]} = 0{,}003 \text{ при } \frac{m_S}{m \cdot s} = 1:200\,000,$$

Следовательно, без большой потери точности этим членом можно пренебречь.

Зная величины $[f_L f_L]$, (22), (23), (24), получим приближенную формулу обратного веса $\frac{1}{P_L}$.

$$\frac{1}{P_L} = \left(0{,}1259q + 3{,}5593 + \frac{0{,}9583}{q+3{,}3391} - \frac{24{,}1737}{q+7{,}7366} + \frac{0{,}0130}{q+0{,}7214} - \right.$$

$$\left. - \frac{1{,}1518}{q+1{,}9766} + \frac{0{,}1868}{q+0{,}8559}\right) \left(\frac{L}{10^6 \mu}\right)^2 \frac{1}{N}. \qquad (25)$$

Величину $\frac{1}{P_L}$, кроме формулы (25), с достаточной точностью можно находить по эмпирической формуле

$$\frac{1}{P_L}=\left(q-\frac{q^2(q+3{,}3391)}{1{,}3333(q+1{,}9459)(q+7{,}7469)}\cdot\frac{\sqrt{q}+1{,}37}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{L}{10^6\mu}\right)^2\frac{1}{N}. \quad (26)$$

ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГ ТРИАНГУЛЯЦИОННОГО РЯДА

Определим обратный вес $\frac{1}{P_T}$ уравненного значения направления диагонали ряда.

Из решения нормальных уравнений найдем неквадратичные коэффициенты эквивалентной системы. Для уравнений (3) в сочетании с весовой функцией направления диагонали ряда имеем:

$$[a_i f_T\cdot(i-1)]=-[N-(i-1)],\ i=1,2,3,\ldots,N,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{[a_i f_T\cdot(i-1)]^2}{[a_i a_i\cdot(i-1)]}=-\frac{0{,}5N(N+1)(2N+1)}{6}. \quad (27)$$

Для уравнений (4) и весовой функции направления диагонали ряда коэффициенты эквивалентной системы получим по формуле:

$$[b_i f_T\cdot(N+i-1)]=+0{,}5\delta[N-(i-1)],\ i=1,2,\ldots,N;$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{[b_i f_T\cdot(N+i-1)]^2}{[b_i b_i\cdot(N+i-1)]}=-\frac{0{,}25\delta^2}{1{,}5\delta^2+2q}\cdot\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}. \quad (28)$$

Для уравнений (5) имеем

$$[c_i f_T\cdot(2N+i-1)]=-0{,}25\delta[N-(i-1)],\ i=1,2,\ldots N.$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{[c_i f_T\cdot(2N+i-1)]^2}{[c_i c_i\cdot(2N+i-1)]}=-\frac{0{,}0625\delta^2}{R}\cdot\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}. \quad (29)$$

Коэффициенты эквивалентной системы уравнений (6) и весовой функции направления диагонали ряда вычислим по формуле

$$[d_i f_T\cdot(3N+i-1)]=-\frac{(\delta^3+1{,}5\delta q)(R-0{,}1875q)}{(1{,}5\delta^2+2q)R}\times$$

$$\times\frac{B_{3N+i-2}+0{,}5\delta^2 qR\cdot a_{3N+i-2}}{B_{3N+i-2}}(N-i+1),$$

$i=1,2,\ \ldots,\ N.$

Тогда

$$\frac{[d_i f_T\cdot(3N+i-1)]^2}{[d_i d_i\cdot(3N+i-1)]} = -$$

$$-\frac{(\delta^3+1{,}5\delta q)^2(R-0{,}1875q)^2}{(1{,}5\delta^2+2q)R}\,\frac{(B_{3N+i-2}+0{,}5\delta^2 qR\cdot\alpha_{3N+i-2})^2}{QB^2_{3N+i-2}-0{,}25\delta^4q^2R^2B_{3N+i-2}B_{3N+i-3}}(N-$$

$$-i+1)^2.$$

Сумма N членов $\frac{[d_i f_T\cdot(3N+i-1)]^2}{[d_i d_i\cdot(3N+i-1)]}$ после преобразований и сокращений равна:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{[d_i f_T\cdot(3N+i-1)]^2}{[d_i d_i\cdot(3N+i-1)]} = -\left(\frac{0{,}0378}{q+3{,}3391}+\frac{1{,}1585}{q+0{,}7420}+\frac{1{,}2432}{q+7{,}7366}-\right.$$

$$\left.-\frac{1{,}0149}{q+0{,}7214}+\frac{0{,}0133}{q+1{,}9766}\right)\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}. \qquad (30)$$

Для уравнений (7) и весовой функции направления диагонали ряда сумма N членов $\frac{[l_i f_T\cdot(4N+i-1)]^2}{[l_i l_i\cdot(4N+i-1)]}$ после преобразований примет вид:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{[l_i f_T\cdot(4N+i-1)]^2}{[l_i l_i\cdot(4N+i-1)]} = -\left(-\frac{0{,}0367}{q+3{,}3391}-\frac{0{,}0194}{q+0{,}7420}+\right.$$

$$\left.+\frac{0{,}4637}{q+6{,}0865}+\frac{3{,}3725}{(q+6{,}0865)^2}\right)\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}. \qquad (31)$$

Суммы $\sum_{i=1}^{N}\frac{[h_i f_T\cdot(5N+i-1)]^2}{[h_i h_i\cdot(5N+i-1)]}$ и $\sum_{i=1}^{N}\frac{[j_i f_T\cdot(6N+i-1)]^2}{[j_i j_i\cdot(6N+i-1)]}$ малы по сравнению с суммой членов (27), (28), (29), (30), (31) (не превышают 1% при любом q и N) и поэтому могут не учитываться при вычислении обратного веса $\frac{1}{P_T}$.

Зная величины $[f_T f_T]$, (27), (28), (29), (30), (31), получим величину обратного веса $\frac{1}{P_T}$

$$\frac{1}{P_T} = \frac{N^2+2}{3N}-\left(\frac{0{,}5576}{q+3{,}3391}+\frac{1{,}3246}{q+0{,}7420}+\frac{1{,}2432}{q+7{,}7366}-\right.$$

$$\left.-\frac{1{,}0149}{q+0{,}7214}+\frac{0{,}4637q+6{,}1942}{(q+6{,}0865)^2}\right)\frac{(N+1)(2N+1)}{6N}. \qquad (32)$$

Значение обратного веса $\frac{1}{P_T}$, кроме того, можно вычислить по следующей эмпирической формуле:

$$\frac{1}{P_T}=\frac{2N^2+N+3}{4N}-\frac{(N+1)(2N+1)}{6N}\cdot\frac{\sqrt{q}+0{,}45}{\sqrt{q}}\Big(0{,}5+$$
$$+\frac{0{,}5565}{q+3{,}3391}+\frac{0{,}1855}{q+0{,}7420}\Big). \qquad (33)$$

ТОЧНОСТЬ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ ОБРАТНЫХ ВЕСОВ

С целью проверки полученных формул для вычисления обратных весов $\frac{1}{P_\alpha}$, $\frac{1}{P_L}$, $\frac{1}{P_T}$ были решены численные примеры по схеме Гаусса.

При решении примеров принимали число геодезических квадратов $N=3$, 5, 8 и $\frac{m_S}{m\cdot S}=1:200\,000$, $1:350\,000$, $1:450\,000$ и $1:500\,000$. Величины обратных весов $\frac{1}{P_\alpha}$, $\frac{1}{P_L}$, $\frac{1}{P_T}$, полученные из решения схемы Гаусса, сравнены соответственно с обратными весами, определенными по формулам (20), (21), (25), (26), (32), (33). Вычислены погрешности (в процентах) обратных весов, найденных по приближенным и эмпирическим формулам, по сравнению с обратными весами, полученными из решения схемы Гаусса. Результаты вычислений сведены в таблицы 1, 2, 3.

Таблица 1

Величины и точность обратных весов $\frac{1}{P_\alpha}$

$\frac{m_S}{m\cdot S}$	$\frac{1}{P_\alpha}$ по схеме Гаусса	$\frac{1}{P_\alpha}$ по формуле (20)	Погрешность, %	$\frac{1}{P_\alpha}$ по формуле (21)	Погрешность, %
$N=3$					
1:200 000	2,04	1,91	6,3	2,07	1,4
1:350 000	1,13	1,10	2,6	1,13	0
1:450 000	0,93	0,92	1,0	0,89	4,3
1:500 000	0,85	0,85	0	0,78	8,2

Продолжение табл. 1.

$\frac{m_s}{m \cdot s}$	$\frac{1}{P_\alpha}$ по схеме Гаусса	$\frac{1}{P_\alpha}$ по формуле (20)	Погрешность, %	$\frac{1}{P_\alpha}$ по формуле (21)	Погрешность, %
			$N = 5$		
1:200 000	3,40	3,19	6,1	3,45	1,4
1:350 000	1,88	1,83	2,6	1,88	0
1:450 000	1,55	1,54	0,6	1,48	4,5
1:500 000	1,42	1,42	0	1,31	7,7
			$N = 8$		
1:200 000	5,43	5,10	6,0	5,53	1,8
1:350 000	3,01	2,93	2,6	3,01	0
1:450 000	2,48	2,46	0,8	2,37	4,4
1:500 000	2,27	2,28	0,4	2,09	7,9

Таблица 2

Величины и точность обратных весов $\frac{1}{P_L'}$

$$\frac{1}{P_L'} = \left(\frac{10^6\mu \cdot N}{L}\right)^2 \frac{1}{P_L}.$$

$\frac{m_s}{m \cdot s}$	$\frac{1}{P_L'}$ по схеме Гаусса	$\frac{1}{P_L'}$ по формуле (25)	Погрешность, %	$\frac{1}{P_L'}$ по формуле (26)	Погрешность, %
			$N = 3$		
1:200 000	5,86	6,39	9,0	6,23	6,3
1:350 000	2,55	2,53	0,7	2,64	3,5
1:450 000	2,05	1,98	3,4	2,10	2,4
1:500 000	1,86	1,77	4,8	1,90	2,1

Продолжение табл. 2.

$\frac{m_s}{m \cdot s}$	$\frac{1}{P_L'}$ по схеме Гаусса	$\frac{1}{P_L'}$ по формуле (25)	Погрешность, %	$\frac{1}{P_L'}$ по формуле (26)	Погрешность, %
		$N = 5$			
1:200 000	9,76	10,64	9,0	10,39	6,4
1:350 000	4,25	4,22	0,7	4,40	3,5
1:450 000	3,42	3,30	3,4	3,50	2,3
1:500 000	3,10	2,95	4,8	3,16	1,9
		$N = 8$			
1:200 000	15,62	17,03	9,0	16,62	6,4
1:350 000	6,81	6,75	0,8	7,03	3,2
1:450 000	5,47	5,27	3,6	5,60	2,3
1:500 000	4,96	4,71	5,0	5,06	2,0

Таблица 3

Величины и точность обратных весов $\frac{1}{P_T}$

$\frac{m_s}{m \cdot s}$	$\frac{1}{P_T}$ по схеме Гаусса	$\frac{1}{P_T}$ по формуле (32)	Погрешность, %	$\frac{1}{P_T}$ по формуле (33)	Погрешность, %
		$N = 5$			
1:200 000	1,22	1,15	5,7	1,30	6,5
1:350 000	0,68	0,65	4,4	0,74	8,8
1:450 000	0,57	0,54	5,2	0,56	1,7
1:500 000	0,52	0,49	5,7	0,48	7,6

Как видно из приведенных вычислений, погрешности в определении обратных весов по приближенным формулам (20), (25), (32) и по эмпирическим формулам (21), (26), (33) невелики и этими формулами вполне можно пользоваться при оценке точности проектируемых сетей указанного вида. Формулы могут применяться при $1:500\,000 < \frac{m_s}{m \cdot s} < 1:100\,000$ и и при любом N.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Кутузов. Накопление погрешностей в рядах триангуляции с измеренными сторонами. Известия высших учебных заведений, Геодезия и аэрофотосъемка № 2, 1957.

2. А. В. Заводовский. Оценка точности линейных триангуляций. Научные записки Львов. политехнического института, серия геодезическая № 5, 1959.

3. К. Л. Проворов. Точность элементов сети линейных триангуляций. Труды ЦНИИГАиК, вып. XI, 1958.

4. К. Л. Проворов. Точность цепи триангуляций с измеренными сторонами и углами. Известия высших учебных заведений, Геодезия и аэрофотосъемка № 3, 1959.

5. К. Л. Лапинг. О точности построения рядов с измеренными сторонами и углами. Геодезия и картография № 5, 1957.

Львовский
политехнический институт

Работа поступила
22 мая 1964 г.