А. Г. ЧУИЧ

О КАТАЛОГЕ КООРДИНАТ ТОЧЕК ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Известно, что цель проектировщика при проектировании железных дорог, водных каналов, трубопроводов и т. д. состоит в получении оптимального варианта трассы объекта проектирования. Выбор оптимального варианта определяется анализом той информации, которую проектировщик получает в результате предварительно нанесенных на карту возможных вариантов трассы. Однако эта информация существенно расширяется и анализ уточняется, если мы знаем расположение геодезической линии, соединяющей два исходных пункта трассирования на топографической карте. Здесь (и в дальнейшем) под геодезической линией мы понимаем кратчайшую линию, соединяющую две данные точки поверхности (местности), которая отвечает данной топографической карте.

Действительно, во-первых, наиболее вероятно, что минимум строительных затрат будет при выборе трассы вдоль геодезической линии, а во-вторых, если это даже не так, то всякому варианту, намеченному проектировщиком с помощью обычных приемов, может отвечать вариант прохождения геодезической между каждыми двумя точками тех нескольких определенных точек, через которые должна проходить трасса, намеченная проектировщиком. Поэтому всякая информация относительно положения геодезической есть и информация относительно оптимального варианта трассирования.

Следует заметить, что приведенные рассуждения (о выборе трассы вдоль геодезической линии) имеют практическое значение только для горной или сильно холмистой местности. Для местности равнинной или мало холмистой на топографической карте (в проекции Гаусса—Крюгера) геодезические линии на большом расстоянии практически можно считать прямыми. Но в горной местности (или сильно холмистой) проекции этих геодезических линий на топографической карте будут изображаться, как правило, в виде сложных кривых.

Предположим, что мы имеем участок горной местности размером 200×100 *км*, на котором насчитывается 100 триангуляционных пунктов государственной сети I и II классов. Выберем из этих 100, например, 25 пунктов, равномерно (в шахматном порядке) покрывающих эту местность.

Предположим, что мы определили положение геодезической линии между каждыми двумя пунктами из этих 25 пунктов; количество всех геодезических линий будет равно $\frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 300$. Это количество геодезических можно значительно сократить, если не определять геодезические между каждыми двумя пунктами, находящимися друг от друга ближе определенного расстояния (например, ближе 50 *км*).

Далее мы предполагаем, что все определяемые геодезические не наносятся на данную топографическую карту, а составляется каталог координат отдельных точек всех этих геодезических линий.

Таким образом, мы считаем, что каждому участку горной (или сильно холмистой) местности должен соответствовать определенный каталог координат отдельных точек геодезических линий, связанных с определенным числом триангуляционных пунктов I и II классов, находящихся в этом участке.

В таком случае задача отыскания варианта трассирования, близкого к оптимальному, решается так. Пусть на участке горной местности нам необходимо осуществить трассирование между точками A и B этого участка. Это мы производим в следующем порядке:

1) Определяем на топографической карте ближайшие к точкам A и B триангуляционные пункты, включенные в каталог координат геодезических линий.

Пусть T_A — пункт, ближайший к A, а T_B — пункт, ближайший к B.

2) Наносим на карту по координатам геодезическую линию, соединяющую точки T_A и T_B.

3) Из A проводим кратчайшую линию (по прямой на карте) до пересечения с геодезической $T_A T_B$ и обозначаем точку пересечения через A_1; так же из точки B проводим кратчайшую линию до пересечения с той же геодезической $T_A T_B$ и обозначаем точку пересечения через B_1.

4) Если линия AA_1B_1B (где A_1B_1 — участок геодезической $T_A T_B$) удовлетворяет условиям проектирования в отношении рельефа, ситуации, условий проходимости и т. д., то эту линию берем в качестве варианта, близкого к оптимальному, и задачу считаем решенной.

5) Если вдоль геодезической $T_A A_1 B_1 T_B$ имеется участок, например от точки A_2 до точки B_2, неблагоприятный в отношении рельефа или ситуации, то находим участок другой геодезической (имеющей иные исходные точки), которая (идя в направлении от A_2 к B_2) пересекает геодезическую $T_A A_1 M_1 T_B$

в точках A_3 и B_3, таких, что точка A_3 близка к A_2, а точка B_3 близка к B_2.

Пусть участок этой новой геодезической A_3B_3 является благоприятным в отношении рельефа и ситуации. Тогда линию $AA_1A_3B_3B_1B$ (где участки AA_1A_3 и B_3B_1B принадлежат геодезической T_AT_B, а участок A_3B_3 — другой геодезической) принимаем за вариант, близкий к оптимальному, и задачу трассирования считаем решенной.

6) Если же по условию линия трассирования должна проходить через последовательные определенные пункты участка, то рассмотренный выше прием трассирования осуществляем между каждой парой этих последовательных пунктов.

Далее мы таким же образом (если в этом есть необходимость) можем наметить несколько вариантов, близких к оптимальному, и анализировать их с целью выбора наилучшего, так как вблизи точек A и B могут находиться и другие (кроме T_A и T_B) точки, между которыми определены геодезические.

Из изложенного следует, что выбор оптимального варианта трассы с помощью геодезических осуществляется (как и при обычном проектировании) с учетом рельефа, ситуации, условий проходимости и т. д., но этот выбор производится среди линий как бы наилучшего приближения.

Проектирование с помощью рассмотренного метода геодезических не связано с дополнительной затратой времени (по отношению к обычному проектированию), если не считать нанесения на карту нескольких геодезических по координатам.

Рассмотрим теперь вопрос о составлении каталога координат геодезических линий для данного участка горной или сильно холмистой местности.

Известен метод определения геодезических линий поверхности, заданной некоторым уравнением.

Этот метод связан с решением некоторого нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, которое может быть получено либо из вариационного принципа, либо из геометрического определения геодезической линии.

Численное решение этого дифференциального уравнения даст нам искомые координаты отдельных точек геодезической.

Однако для приближенного определения координат точек геодезической нам представляется более удобным способ развертки, который состоит в следующем.

Вначале определяем ограниченную область M поверхности (местности трассирования, изображенной на данной топографической карте), которая содержит геодезическую между исходными пунктами трассирования. Далее строится многогранная поверхность $M_п$, состоящая из треугольников, сплошной сетью покрывающих область M так, что любая вершина каждого треугольника одновременно принадлежит областям M и $M_п$.

Рассмотрим ломаную, проходящую по многогранной поверхности $M_п$, соединяющую два исходных пункта трассирования. Пусть эти два пункта являются также вершинами треугольников многогранной поверхности $M_п$.

Пусть эта ломаная, длину которой обозначим через $l_п$, будет кратчайшей. Если число граней поверхности $M_п$ будет безгранично возрастать так, что величина периметра наибольшей грани будет стремиться к нулю, то $l_п$ будет стремиться к некоторому пределу, обозначенному через l:

$$\lim_{n \to \infty} l_п = l.$$

С другой стороны, можно показать, что величина l должна составлять длину геодезической, соединяющей два исходных пункта трассы.

Однако система всяких геодезических измерений дает нам в конце концов положение дискретного множества точек земной поверхности.

Поэтому в каждом случае проектирования мы представляем исходную местность в виде многогранной поверхности $M_п$ и ищем кратчайшую ломаную, соединяющую (по поверхности $M_п$) два исходных пункта. Найти кратчайшую ломаную многогранной поверхности $M_п$ можно путем ее развертки, так как кратчайшая ломаная многогранной поверхности $M_п$ при развертке на плоскость переходит в прямую линию. Это можно осуществить так.

Пусть мы имеем топографическую карту горной местности и два пункта на ней A и B, между которыми отыскивается кратчайшая линия, проходящая по этой местности. Область M карты, которая содержит эту кратчайшую, можно определить следующим образом.

На карте точки A и B соединяем прямой и определяем расстояние $AB = 2a$, взятое по продольному профилю. Тогда областью M, которая содержит геодезическую между A и B (на карте), будет являться эллипс. Фокусами этого эллипса будут точки A и B, а длина большой оси будет равна длине AB по продольному профилю, т. е. величине $2a$.

Легко показать, что если бы существовала хотя бы одна точка геодезической, находящаяся вне эллипса M, то длина проекции этой геодезической оказалась бы больше $2a$, т. е. длины AB по продольному профилю.

Области M карты на местности отвечает область M_1, которая получается как ортогональная проекция области карты на соответствующую ей часть земной поверхности, если последнюю уменьшить в соответствии с масштабом карты. Здесь мы предполагаем для простоты, что размер участка не настолько велик, чтобы учитывать поправки за редукцию. Иначе, мы предполагаем, что область земной поверхности M_1, содержащей геодезическую между точками A_1 и B_1, спроектирована на горизонтальную плоскость и эта горизонтальная плоскость совпадает с плоскостью нашей карты. Проекция точки A_1 (местности) есть точка A (карты) и проекция B_1 есть B.

Выберем декартову пространственную систему координат так.

Плоскость xOy будет совпадать с плоскостью карты; за начало координат O возьмем середину расстояния между A и B по карте, ось x берем вдоль прямой AB (по карте, с положительным направлением от A к B); ось y берем перпендикулярно оси x (с положительным направлением, получаемым от вращения положительного направления оси x вокруг O против хода часовой стрелки); ось z берем перпендикулярно плоскости xOy в точке O с положительным направлением в сторону возрастания высотных отметок.

Если обозначим по карте расстояние между A и B через $2c$, то координаты точек области M_1, A_1 и B_1 будут: $A_1(-c;\ O;\ z_a)$; $B_1(c;\ O;\ z_b)$, где z_a и z_b — высотные отметки этих точек A_1 и B_1.

Разделим $AB=2c$ эллипса M на 2_n равных частей и эту единицу деления $m=\frac{c}{n}$ отложим (от начала координат) вдоль координатных осей. Через точки деления проведем ряд плоскостей, параллельных плоскостям xOz, yOz, $y=x$.

В результате этого область эллипса M покроется сетью равнобедренных прямоугольных треугольников, а область M_1 — сетью криволинейных треугольников.

Далее, проведя плоскость через три точки, определяющие каждый криволинейный треугольник области M_1, получим многогранную поверхность M_n, состоящую из прямолинейных треугольников кратчайшую ломаную которой (взятую по этой многогранной поверхности M_n), соединяющую точки A_1 и B_1, мы приближенно принимаем за геодезическую линию, проходящую по поверхности M_1 и соединяющую те же точки A_1 и B_1.

Для определения этой кратчайшей ломаной с помощью развертки поступаем следующим образом.

Занумеровав все равнобедренные прямоугольные треугольники, которые покрывают область эллипса M, произведем развертку треугольников в первой полосе квадратов, примыкающих к прямой AB (например сверху). Заметим, что каждому треугольнику эллипса M отвечает (с тем же номером) треугольник многогранной поверхности $M_{п}$, а развертку этих треугольников (т. е. поверхности $M_{п}$) мы фактически и осуществляем, хотя и говорим о развертке «треугольников, лежащих в первой полосе эллипса», т. е. мы фактически осуществляем развертку тех треугольников, что над ними, но придерживаемся нумерации согласно треугольников эллипса.

Найдем сначала длины сторон всех этих треугольников. Длина каждой такой стороны l определяется по формуле:

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \tag{1}$$

где l — длина стороны треугольника, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — плоские конформные координаты концов этой стороны, а z_1 и z_2 — высотные отметки концов этой же стороны треугольника.

Далее, в отдельной плоскости R, которую назовем плоскостью развертки, взяв один из треугольников (имеющий вершиной точку A) за основной (т. е. его плоскость возьмем за плоскость развертки R), мы путем вращения вокруг общих ребер приводим плоскости всех остальных треугольников к плоскости этого треугольника, т. е. осуществляем развертку всех этих треугольников в плоскости R.

Эта развертка производится сначала графически. Сущность ее состоит в том, что графически по одной из сторон треугольника (принадлежащей и предыдущему треугольнику), которая уже находится на плоскости развертки R, мы по длинам двух других сторон треугольника определяем (путем графических засечек) положение третьей вершины этого треугольника в плоскости развертки R. Развернув последовательно все эти треугольники, мы, как правило, получим, что в этой плоскости треугольники расположатся вдоль некоторой ломаной. Соединив прямой (на плоскости R) точки A и B, мы заметим, что эта прямая пересечет некоторые из этих треугольников, а некоторые не пересечет. Тогда, оставив треугольники, которые эта прямая пересекла и добавив к ним другие (в зависимости от того, как расположен изгиб линии треугольников в плоскости R относительно прямой AB), мы получили новую систему треугольников.

Развернув (заново) эту новую систему треугольников в плоскости R, мы снова проводим на этой плоскости прямую AB. Эта прямая опять пересечет часть треугольников, а часть их не пересечет.

Оставляя те треугольники, которые AB пересекает, и добавляя к ним другие (взамен тех, которые прямая AB не пересекает), мы новую систему треугольников снова разворачиваем на плоскость R и снова проводим прямую AB и т. д.

В конце концов путем таких последовательных приближений мы должны достигнуть того, что прямая AB вся будет проходить (в плоскости R) внутри системы этих развернутых треугольников, т. е. пересекать каждый из этих треугольников.

Такая окончательная последовательность треугольников поверхности $M_п$ должна существовать. Действительно, во-первых, кратчайшая ломаная, проходя по многогранной поверхности $M_п$, дает такую непрерывную последовательность треугольников, а во-вторых, эта последовательность, будучи развернутой на плоскость, переводит эту кратчайшую ломаную в прямую.

После нахождения окончательной последовательности треугольников приступаем к аналитическому определению координат вершин этих треугольников в плоскости равертки R. В этой плоскости R за начало координат берем точку A, а за ось x — одну из сторон первого треугольника (с вершиной A).

Если координаты двух вершин треугольника нам даны (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (эти координаты определены из предыдущих треугольников) и даны длины двух сторон l_1 и l_2 этого треугольника, то искомые координаты третьей вершины треугольника (x_3, y_3) определятся из уравнений:

$$\begin{aligned} (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 = l_1^2, \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = l_2^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку координаты всех вершин первого треугольника нам известны, а также известны и длины сторон этого треугольника, то с помощью формул (2) можно последовательно определить координаты всех вершин треугольников, развертываемых на плоскость R. Таким образом, и координаты точки $B(x_B, y_B)$ в плоскости развертки R оказываются известными.

Далее, зная в системе R уравнение прямой

$$y = \frac{y_B}{x_B} x, \tag{3}$$

мы можем определить, в каком отношении эта прямая делит сторону каждого пересекаемого треугольника, и тем самым приближенно найти плоские конформные координаты отдельных точек геодезической, соединяющей на карте точки A и B.

Дадим теперь оценку точности разбираемого способа.

Будем считать, что на топографической карте проведены через m метров прямые линии (в масштабе карты), параллельные координатным осям x и y и построена многогранная поверхность $M_п$ способом, о котором говорилось выше. Пусть A_1 и B_1 — два исходных пункта поверхности M_1 (см. обозначения выше), которые одновременно принадлежат и многогранной поверхности M_n, а g_m обозначает длину кратчайшей ломаной, соединяющей эти два пункта A_1 и B_1 по поверхности M_n.

Обозначим через g длину геодезической между A_1 и B_1 по поверхности M_1. В этом случае разность

$$g - g_m = \Delta_m \tag{4}$$

будет точно давать величину абсолютной погрешности, а дробь

$$\alpha_m = \frac{\Delta_m}{g} \tag{5}$$

определит величину относительной погрешности уклонения длины кратчайшей ломаной g_m от точного значения длины геодезической g.

Однако, фактически обладая только картой, мы не имеем возможности определить точно величину g и тем самым знать величины Δ_m и α_m.

С другой стороны, каждая карта имеет определенную точность (в смысле линейных размеров).

Допустим, что величина $к$ в метрах (в масштабе карты) характеризует эту точность. Иначе на карте всегда найдутся такие два пункта, расстояние между которыми не может быть определено точнее, чем до $к$ метров. Если через $g_к$ обозначить длину кратчайшей ломаной, соединяющей два пункта A_1 и B_1 по многогранной поверхности $M_к$, которая построена по отношению к карте так же, как и многогранная поверхность M_n, то под фактической абсолютной погрешностью уклонения длины кратчайшей ломаной g_m (очевидно, что $к \leqslant m$) от длины кратчайшей ломаной $g_к$, наиболее близкой к геодезической, мы понимаем величину

$$\Delta = g_к - g_m. \tag{6}$$

Соответственно относительная погрешность будет равна

$$\alpha = \frac{\Delta}{g_к} = \frac{g_к - g_m}{g_к}. \tag{7}$$

Днепропетровский
металлургический институт

Работа поступила
22 мая 1964 г.