МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 8

УДК 528.2

В. Ф. ЕРЕМЕЕВ, М. И. ЮРКИНА

К ВОПРОСУ О ВОЗМОЖНОСТИ ВЫВОДА ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ГЕОИДЕ ПО ГРАВИМЕТРИЧЕСКИМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Применив формулу Грина к функции $-\rho\Delta g+2(W_0-U_0)$, гармоничность которой следует из соотношения

$$2T+\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}=-\rho\Delta g+2(W_0-U_0), \tag{1}$$

Монин (1967) получил формулу, выражающую потенциал W_0 на геоиде через аномалии Δg силы тяжести и производные $\frac{\partial\Delta g}{\partial n}$ по внешней нормали n к земной поверхности:

$$W_0-U_0=\frac{1}{4}\rho_0\Delta g+\frac{1}{8\pi}\int\frac{\rho}{r}\frac{\partial\Delta g}{\partial n}ds+\frac{1}{8\pi}\int\Delta g\left\{\left(\frac{3}{2r}+\frac{\rho^2-\rho_0^2}{2r^3}\right)\cos\alpha+\right.$$
$$\left.+\frac{\rho\rho_0}{r^3}\sin\psi\sin\alpha\cos\vartheta\right\}dS. \tag{2}$$

Здесь приняты следующие обозначения: T — возмущающий потенциал; ρ,ρ_0 — радиус-вектор фиксированной и текущей точек; U_0 — значение нормального потенциала на отсчетном эллипсоиде; r — расстояние между фиксированной и текущей точками;

$$\sin\frac{\psi}{2}=\frac{r_0}{2a},$$

a — радиус отсчетной сферы; r_0 — расстояние между проекциями упомянутых точек на отсчетную сферу; dS — элемент земной поверхности; α — угол наклона элемента dS относительно отсчетной сферы; ϑ — угол между плоскостью, содержащей ρ и r, и плоскостью, содержащей ρ и n.

Монин считает возможным использовать формулу (2) (или несколько упрощенную формулу) для вывода величины W_0 на основе только гравиметрических измерений, без использования астрономических и геодезических данных. Ранее (Мигаль, 1949; Молоденский, Еремеев, Юркина, 1960) было принято считать, что нельзя вывести величину W_0 без использования астрономических измерений и геодезических координат удаленных точек в одной системе. Для подтверждения правоты такого мнения отметим, что, действительно, производную $\frac{\partial\Delta g}{\partial n}$ без линейных измерений вывести пока что нельзя (в настоящее время только еще идут поиски способов измерений производных от силы тяжести g), и эта производная должна быть получена в результате пересчета поля аномалий Δg силы тяжести. Однако тогда в общем случае в выражение этих производных войдет член $W_0—U_0$, не принятый Мониным во внимание при его утверждении о возможности вывода величины W_0 на основе только гравиметрических измерений.

Для регуляризированного геоида Монин без вывода привел формулу

$$W_0 - U_0 = \frac{a}{8\pi} \int \left(2\Delta g + a \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right) d\sigma . \tag{3}$$

Связь между нулевым порядком в разложении вертикального градиента аномалии силы тяжести и нулевым же порядком в разложении аномалии Δg в случае $W_0 \neq U_0$ показана Мониным в виде

$$a^2 \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right)_0 = -2a\Delta g_0 + 2(W_0 — U_0) . \tag{4}$$

Подставив (4) в (3), убеждаемся, что (3) является тождеством, из которого определить величину $W_0—U_0$ нельзя.

Покажем, что к аналогичному тождеству приводит применение формулы Грина

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int \left(\Phi_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_s \right) dS , \tag{5}$$

где, как и у Монина,

$$\Phi = -\rho \Delta g + 2(W_0 — U_0);$$

$$\Phi_s = -\rho_s \Delta g_s + 2(W_0 — U_0); \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_s = -\rho_s \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial n} \right)_s - \Delta g_s \cos \alpha . \tag{7}$$

Будем для простоты земную поверхность S считать сферической, тогда $\cos\alpha = 1$.

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} = -\frac{1}{2ra} . \tag{8}$$

Пусть на сферической Земле заданы значения возмущающего потенциала

$$T_s = \sum_{n=0}^{\infty} T_n , \tag{9}$$

тогда во внешней точке

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{a^{n+1}}{\rho^{n+1}} , \tag{10}$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = -\sum_{n=0}^{\infty} T_n (n+1) \frac{a^{n+1}}{\rho^{n+2}} , \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n (n+1)(n+2) \frac{a^{n+1}}{\rho^{n+3}}. \tag{12}$$

Таким образом,

$$\Phi = 2T + \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} = \sum_{0}^{\infty} (1-n) T_n \frac{a^{n+1}}{\rho^{n+1}}, \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) = 3\frac{\partial T}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = -\Delta g - \rho \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} = \sum_{0}^{\infty} (n^2 - 1) T_n \frac{a^{n+1}}{\rho^{n+2}}. \tag{14}$$

Из этих соотношений следуют известные зависимости:

$$-a\Delta g_0 + 2(W_0 - U_0) = T_0; \quad T_n = \frac{a\Delta g_n}{n-1};$$

$$-a\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 = 2\Delta g_0 - \frac{2(W_0 - U_0)}{a}; \quad -a\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_n = (n+2)\Delta g_n.$$

Поскольку член $(W_0 - U_0)$ входит только в соотношения между нулевыми порядками, положим $n=0$. Из (5) теперь найдем

$$-a\Delta g + 2(W_0 - U_0) = \frac{1}{2\pi}\int \Big(-a\Delta g_0 + 2(W_0 - U_0)\left(-\frac{1}{2ra}\right) -$$

$$-\frac{1}{r}\left(\Delta g_0 - \frac{2(W_0 - U_0)}{a}\right) dS = \frac{1}{2\pi}\int \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}\Delta g_0 + \frac{(W_0 - U_0)}{a}\right) dS \tag{15}$$

и, так как $\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\sum_{0}^{\infty} P_n$, убеждаемся в тождественном равенстве. Следовательно, по формуле (2) и всем вытекающим из нее формулам поставленную Мониным задачу решить невозможно.

Предположим теперь, что найден достаточно точный способ измерения производной $\frac{\partial g}{\partial \rho}$. Связь между производными $\frac{\partial g}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}$ установить нетрудно. Из (1) следует

$$\Delta g = -\frac{2T}{\rho} - \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2(W_0 - U_0)}{\rho} \tag{16}$$

и

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} = \frac{2T}{\rho^2} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} - \frac{2(W_0 - U_0)}{\rho^2}. \tag{17}$$

Имея в виду установленную Молоденским (1948) зависимость

$$\zeta = \frac{T}{\gamma(h)} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma(h)},$$

где ζ — высота квазигеоида; h — нормальная высота, выразим производную $\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}$ через $\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} = \frac{\partial g}{\partial \rho}$ (углом между направлением отвеса и радиуса-вектора пренебрегаем):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \gamma(h)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \gamma(h)}{\partial \rho^2}\left(\frac{T}{g(h)} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma(h)}\right). \quad (18)$$

Из (17) следует, что поскольку $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2} = \frac{6\gamma}{\rho^2}$,

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} = \frac{2\Delta g}{\rho} - \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \gamma(h)}{\partial \rho} = \frac{2\Delta g}{\rho} + \frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{\partial \gamma(h)}{\partial \rho}, \quad (19)$$

то при подстановке в (3) получим формулу

$$W_0 - U_0 = \frac{a}{8\pi}\int\left(4\Delta g + a\,\frac{\partial g}{\partial \rho} - a\,\frac{\partial \gamma(h)}{\partial \rho}\right)d\sigma. \quad (20)$$

При выводе $\frac{\partial \Delta g}{\partial n}$ необходимо использовать горизонтальные производные силы тяжести. Мы этого делать не будем, так как требование к точности достаточно выяснить в сферическом случае.

Если аномалии Δg силы тяжести определены с ошибкой около 1 *мгал*, то при выводе алгебраической суммы двух последних членов в круглых скобках в (20) естественно стремление достигнуть такой же точности. Выясняя, какая ошибка допустима в радиусе a и производной $\frac{\partial g}{\partial \rho}$, запишем

$$\Delta\left(a\,\frac{\partial g}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial g}{\partial \rho}\,\Delta a + a\Delta\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\right) = 1 \text{ мгал}. \quad (21)$$

Для простоты предположим, что каждое из слагаемых в (21) нужно знать с точностью в 1 *мгал*.

Поскольку производная $\frac{\partial g}{\partial \rho}$ достигает 0,1 *мгал/м* и часто бывает равной 0,03 *мгал/м*, радиус a необходимо знать с точностью в 10—30 *м*. Таким образом, и в этом пока что нереальном случае измерения вторых вертикальных производных потенциала возникают весьма высокие требования к точности определения радиуса Земли. Следовательно, и в этом случае геодезические измерения необходимы. В случае реальной Земли с такой же точностью нужно знать радиус-вектор текущих точек.

Наконец, из второго слагаемого (21) следует, что в рассматриваемом случае производная $\frac{\partial g}{\partial \rho}$ должна быть измерена с точностью ~0,002 этвеша, то есть необходима относительная точность измерений 10^{-5}—10^{-6}. Не говоря уже о трудностях интерполяции этой производной, отметим очевидность того, что предложения Монина нереальны.

Важно подчеркнуть, что принципиальная невозможность вывода величины W_0 без линейных измерений указана Молоденским [2, стр. 197][1], путь, предлагаемый Мониным, рассмотрен Брагаром [5] в случае регуляризированного геоида так же, как у Монина, без анализа точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мигаль Н. К. Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. Научные записки Львовского политехнического ин-та, серия геодезическая, вып. 15, № 1. Изд-во Львовского ун-та, 1949, стр. 3—66.

[1] Такого мнения придерживался Н. И. Идельсон (см. Н. И. Идельсон, Теория потенциала, ОНТИ, 1936, стр. 306) и ряд других авторов.

2. Молоденский М. С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. Известия АН СССР, серия географическая и геофизическая, вып. 12, № 3, 1948, стр. 193—211.

3. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, 1960.

4. Монін І. Ф. Про визначення гравітаційного потенціалу Землі на геоїді. Доповіді АН УРСР, Б, № 8, 1967, стор. 691—695.

5. Bragard Lucien. Recherches sur le gèoide. Mém. Soc. roy. sci. Liége, I, № 1, 1958, p. 204.

Работа поступила
15 декабря 1967 г.