Определив уравненные значения отметок точек съемочного обоснования в каждом квадрате, вычисляем превышения «реечных» точек над ними так же, как это делается в тахеометрии. С учетом того, что точки находятся в пределах одного квадрата сетки, превышения находим по формуле

$$\Delta h' = H \frac{\delta \Delta p}{p_{c_3} + \Delta p_1 + \Delta p_2 + \frac{\Delta p_1 \Delta p_2}{p_{c_1}}}, \tag{19}$$

где $\delta\Delta p = \Delta p_2 - \Delta p_1 = p_{\text{отсч}_2} - p_c - p_{\text{отсч}_1} + p_c = p_{\text{отсч}_2} - p_{\text{отсч}_1}$, а средняя квадратическая погрешность этого значения, как указано выше, составляет около 5,6 мкм. Поэтому с учетом средней квадратической погрешности отметки точки съемочного обоснования и, имея в виду (11) и (13), получаем

$$m^2_{H'} = m^2_{H_{\text{исх}}} + m^2_{\Delta h \delta \Delta_p} \quad \text{и} \quad m^2_{H'} = \left(\frac{m_{\Delta h} \sqrt{n}}{2}\right)^2 + \left(\frac{H^2}{fB} m_{\delta\Delta p}\right)^2.$$

Для $f = 75$ мм, $m_{\delta\Delta p} = \pm 5{,}6$ мкм, $n = 9$ имеем

$$m_{H'} \approx \frac{H^2}{5500\,B}. \tag{20}$$

При $H : B = 4$

$$m_{H'} \approx \frac{H}{1400}.$$

Таким образом, предложенная технология обработки снимков, полученных при короткодистанционной стереофотограмметрической съемке неметрическими фотокамерами, позволяет определять отметки точек исследуемой поверхности с погрешностями $H : 1400$—$H : 2200$. При этом погрешности измерения высоты фотографирования и положение начальной плоскости над объектом не оказывают существенного влияния на точность определения отметок.

Приведенные погрешности отметок удовлетворяют большинству исследований, которые предполагают моделирование природных явлений. Однако, если задача исследований потребует более высокой точности, то ее можно достигнуть улучшением метрических характеристик снимков, повышением точности самих измерений, применением более длиннофокусных объективов и другими мерами.

Данная методика не требует использования сложного оборудования для съемки и обработки снимков и может найти применение в нефотограмметрических исследовательских лабораториях.

Список литературы: 1. *Гуткин В. Л.* Определение координат точек водной поверхности при короткодистанционной стереофотограмметрической съемке любительскими фотокамерами. — Геодезия и фотограмметрия в горном деле, 1979, вып. 6. 2. *Гуткин В. Л., Еремин В. В.* Составление рельефного плана свободной поверхности потока по стереопарам любительских фотоснимков. — Геодезия, картография и аэрофосъемка, 1977, вып. 25.

Статья поступила в редколлегию 09. 11. 82

УДК 528.735

А. Л. ДОРОЖИНСКИЙ, О. В. ТУМСКАЯ, М. Я. ГРИНЮК

УРАВНИВАНИЕ ФОТОТРИАНГУЛЯЦИИ ИЗ НЕЗАВИСИМЫХ МОДЕЛЕЙ С УЧЕТОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТНЫХ СВЯЗЕЙ

В методе фототриангуляции из независимых моделей (назовем его в дальнейшем классическим) уравнивают пространственные фотограмметрические координаты X, Y, Z точек, полученные из построения одиночных моделей [3]. Эти величины чисто условно выступают в роли измеренных, что является определенной теоретической неточностью. Предложим улучшенный в теоретическом плане подход, полагая, что функциональные взаимосвязи между X, Y, Z и измеренными координатами x, y, x', y' известны и должны быть учтены. Теоретической основой предлагаемого способа являются положения, изложенные для некоррелированных наблюдений в [1, с. 349], а для коррелированных измерений — в [2].

Сформулируем задачу так: задан n-мерный вектор λ измерений, свободный от систематических ошибок; известна его корреляционная матрица R и весовая диагональная матрица P; вычислено s значений функций

$$T = F(\lambda). \tag{1}$$

Необходимо найти уравненное значение вектора

$$\lambda' = \lambda + V, \tag{2}$$

причем должны быть удовлетворены m условия

$$\Phi(T', U') = 0, \tag{3}$$

где

$$T' = T + \Delta T; \tag{4}$$

$$U' = U + \Delta U; \tag{5}$$

T', U' — соответственно уравненные значения функций и дополнительных неизвестных.

Решая поставленную задачу под условием

$$V^T \bar{R} V = \min, \tag{6}$$

где

$$\bar{R} = P^{-1/2} R^{-1} P^{-1/2}. \tag{7}$$

После линеаризаций (3) и (1) составим функцию Лагранжа

$$\Psi = V^T \bar{R} V - 2K^T (A\bar{\alpha} V + \bar{B}\Delta U + W) \tag{8}$$

и получим систему уравнений

$$AQA^T K + \bar{B}\Delta U + W = 0, \tag{9}$$

$$\bar{B}^T K = 0,$$

$$Q = \bar{\alpha} \bar{R} \bar{\alpha}^T; \tag{10}$$

где

$\bar{\alpha}=\partial F/\partial\lambda$ — совокупность всех частных производных; A, $\bar{B}$ — соответственно частные производные;

$$A=\partial\Phi/\partial T; \quad B=\partial\Phi/\partial U; \tag{11}$$

K — вектор коррелат; ΔU — вектор поправок к дополнительным неизвестным

$$W=\Phi(T,\ U) \tag{12}$$

— вектор свободных членов.

Применим изложенные вкратце теоретические основы коррелатного способа уравнивания функций измеренных величин совместно с дополнительными неизвестными для фототриангуляции из независимых моделей.

Пусть в произвольно выбранной пространственной прямоугольной системе координат с началом в точке $S_л$ (левом центре фотографирования) построена по паре снимков модель местности. Координаты правого центра фотографирования равны X_0, Y_0, Z_0, а для точек модели обозначим их X, Y, Z. Функциональную взаимосвязь измеренных и пространственных координат описываем известными уравнениями:

$$T = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = N \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = N \cdot M \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где N — масштабный множитель, определяемый по формуле

$$N = \left\{ \frac{(Y_0 Z_2' - Z_0 Y_2')^2 + (X_0 Z_2' - Z_0 X_2')^2 + (X_0 Y_2' - Y_0 X_2')^2}{(Y_1' Z_2' - Z_1' Y_2')^2 + (X_1' Z_2' - Z_1' X_2')^2 + (X_1' Y_2' - Y_1' X_2')^2} \right\}^{1/2}, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} X_1' \\ Y_1' \\ Z_1' \end{bmatrix} = M_л \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_2' \\ Y_2' \\ Z_2' \end{bmatrix} = M_п \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ -f \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Здесь x, y — измеренные координаты на левом снимке; x', y' — соответственно на правом снимке; $M_л$, $M_п$ — матрицы направляющих косинусов, вычисленные по углам наклона левого и правого снимков; f — фокусное расстояние. Поскольку уравнению (1) соответствует (13), то матрица α_i для i-й точки модели имеет вид

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial x'} & \frac{\partial X}{\partial y'} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial x'} & \frac{\partial Y}{\partial y'} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial x'} & \frac{\partial Z}{\partial y'} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Дифференцирование (13)—(15) дает искомые коэффициенты, которые в виду их громоздкости здесь не приведены. Структура матрицы α для всех точек стереопары такова, что матрица носит близдиагональный характер

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \alpha_n \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где каждый компонент имеет в соответствии с (16), размерность 3×4. Матрица $\bar{\alpha}$, составленная для маршрута, также носит близдиагональный характер

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{I} & & & & \\ & \alpha_{II} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \alpha_K \end{bmatrix}, \tag{18}$$

где I, II, ... K — номера стереопар.

Уравнению (3) соответствует известная взаимосвязь пространственных координат в фотограмметрической и геодезической системах:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = M^{т}(\alpha_0\, \omega_0\, \varkappa_0) \begin{bmatrix} X_г - X_н \\ Y_г - Y_н \\ Z_г - Z_н \end{bmatrix} \cdot t, \tag{19}$$

где $X_н$, $Y_н$, $Z_н$, α_0, ω_0, $\varkappa_0$, t — элементы геодезического ориентирования модели; $X_г$, $Y_г$, $Z_г$ — геодезические координаты точки модели.

Составим матрицу B_i для i-й модели:

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial X_н} & \frac{\partial X}{\partial Y_н} & \frac{\partial X}{\partial Z_н} & \frac{\partial X}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial X}{\partial \omega_0} & \frac{\partial X}{\partial \varkappa_0} & \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial X}{\partial X_г} & \frac{\partial X}{\partial Y_г} & \frac{\partial X}{\partial Z_г} \\ \frac{\partial Y}{\partial X_н} & \frac{\partial Y}{\partial Y_н} & \frac{\partial Y}{\partial Z_н} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial Y}{\partial \omega_0} & \frac{\partial Y}{\partial \varkappa_0} & \frac{\partial Y}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial X_г} & \frac{\partial Y}{\partial Y_г} & \frac{\partial Y}{\partial Z_г} \\ \frac{\partial Z}{\partial X_н} & \frac{\partial Z}{\partial Y_н} & \frac{\partial Z}{\partial Z_н} & \frac{\partial Z}{\partial \alpha_0} & \frac{\partial Z}{\partial \omega_0} & \frac{\partial Z}{\partial \varkappa_0} & \frac{\partial Z}{\partial t} & \frac{\partial Z}{\partial X_г} & \frac{\partial Z}{\partial Y_г} & \frac{\partial Z}{\partial Z_г} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Конкретный вид частных производных также опустим из-за громоздкости. Структура матрицы B для одной стереопары показана на рис. 1.

Переходя к изучению структуры матрицы $\bar{B}$ для маршрута, необходимо иметь в виду, что для связующих точек, расположенных в смежных j и $(j+1)$ стереопарах, мы должны получить одни и те же геодезические координаты, т. е. частные производные для них должны находиться в одном столбце. Такое же правило применимо для центров проекции, поскольку

$$X_{S_{nj}} = X_{S_{nj+1}}; \quad Y_{S_{nj}} = Y_{S_{nj+1}}; \quad Z_{S_{nj}} = Z_{S_{nj+1}}.$$

Графическая интерпретация матрицы $\overline{B}$ маршрута из трех стереопар с тремя связующими точками показана на рис. 2.

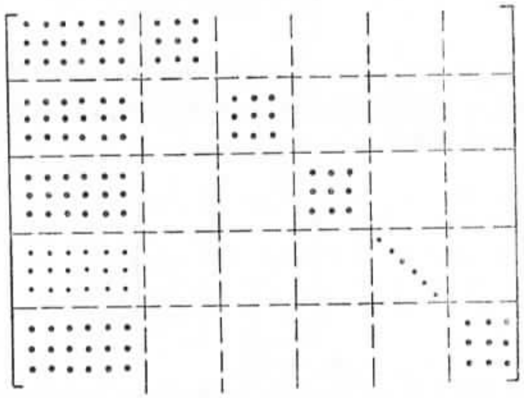

Рис. 1. Структура матрицы B для одной стереопары.

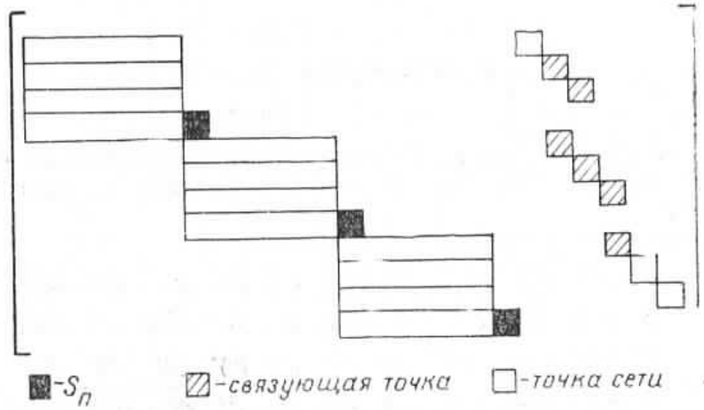

Рис. 2. Структура $\overline{B}$ для маршрута из трех стереопар.

Реализация предложенного метода уравнивания выполнена на ЕС ЭВМ, для чего составлена программа на языке Фортран-IV. После построения одиночных моделей происходит формирование матриц $\overline{\alpha}$ и $\overline{B}$, вычисление весовой матрицы Q, составление нормальных уравнений и решение системы. Нахождение уравненного вектора U' ведется итеративным путем до стабилизации средних квадратических ошибок M_x, M_y, M_z единицы веса для простран-

ственных координат, полученных в двух последовательных итерациях. После завершения уравнивания производится оценка точности по элементам обратной матрицы коэффициентов нормальных уравнений и составляется известными приемами нормированная корреляционная матрица. На печать выдаются каталог координат и элементы внешнего ориентирования, а также результаты оценки точности фототриангуляции.

Экспериментальная сравнительная проверка метода проведена в два этапа: по макетным снимкам и по аэрофотоснимкам трех залетов с параметрами, приведенными в таблице. Измерения выполнены на стереокомпараторе СК-1818 одним приемом, количество точек в стереопаре 10—12, количество связующих точек в каждой стереопаре — 3. Сгущение сети проводилось четырьмя методами: связок; разработанным независимых моделей; классическим независимых моделей; частично зависимых моделей. При этом принято допущение, что измеренные величны некоррелированные и равноточные.

Оценка точности методов фототриангуляции

Наименование метода фототриангуляции	Ошибка в координатах, м			Относительная m_z/H	К-во контр. точек	Оценка ср. кв. ошибки, м			Количество итераций
	m_x	m_y	m_z			σ_x	σ_y	σ_z	
Длина сети $n=4$, $f=350$ мм, $H=1700$ м, к-во опознаков=6									
Связок	0,10	0,16	0,30	1:6000	9	0,04	0,06	0,11	5
Разработанный независим. моделей	0,10	0,18	0,30	1:6000	9	0,04	0,07	0,11	6
Классический незав. мод.	0,10	0,27	0,30	1:6000	9	0,04	0,10	0,11	6
Частично зависим. моделей	0,10	0,15	0,30	1:6000	9	0,04	0,06	0,11	—
Длина сети $n=4$, $f=100$ мм, $H=200$ м, к-во опознаков=6									
Связок	0,11	0,05	0,10	1:2000	7	0,04	0,01	0,04	5
Разработанный зав. мод.	0,08	0,11	0,12	1:1667	7	0,03	0,04	0,05	6
Классический незав. мод.	0,08	0,07	0,11	1:1818	7	0,03	0,03	0,04	6
Частично завис. моделей	0,06	0,03	0,04	1:5000	7	0,03	0,01	0,02	—
Длина сети $n=4$, $f=100$ мм, $H=200$ м, к-во опознаков=4									
Связок	0.09	0,05	0,19	1:1053	9	0,03	0,01	0,06	5
Разработанный незав. мод.	0,07	0,10	0,14	1:1429	9	0,02	0,03	0,05	6
Классический незав. мод.	0,08	0,07	0,11	1:1818	9	0,02	0,02	0,04	7
Частично завис. моделей	0,04	0,04	0,09	1:2222	9	0,01	0,01	0,03	—

Как следует из первого эксперимента, методы связок, частично зависимых моделей и разработанный способ уравнивания дали практически одинаковые результаты. Результаты определения ординат точек классическим методом в 1,7 раза хуже по сравнению с упомянутым. Следует особо подчеркнуть, что использованный материал обладал высокими метрическими показателями и дисторсия не превышала 0,01 мм по всему полю снимка.

Второй и третий эксперименты проведены на снимках с невысокими метрическими показателями: смаз изображения достигал 0,05 мм, а дисторсия объектива на краю снимка равна 0,035 мм. Это обстоятельство существенно повлияло на точность фототриангуляции. Метод связок и оба метода независимых моделей оказались практически равноточными и в значительной мере уступили методу частично зависимых моделей с исключением деформации сети по полиному второй степени. В этих условиях метод связок (эксперимент 3) дал наихудшую точность определения высот; подтвержден еще раз известный вывод о том, что уравнивание сетей на основе условия коллинеарности целесообразно при использовании высококондиционных снимков.

Таким образом, поставленный эксперимент позволяет сделать частный вывод о том, что классический метод фототриангуляции из независимых моделей целесообразно заменить разработанным, если ведется обработка снимков с высокими метрическими показателями. В таком случае разработанный способ и метод связок практически равноточны.

Список литературы: 1. *Большаков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений. — М.: Недра, 1977. 2. *Дорожинский А. Л., Гринюк М. Я.* Уравнивание функций коррелированных измерений. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 30. 3. *Лобанов А. Н., Кузнецова Ш. Е., Любомирский П. С.* Аналитические методы фотограмметрии. — В кн.: Итоги науки и техники. Геодезия и аэросъемка. М., 1982, т. 20.

Статья поступила в редколлегию 20.05.83

СОДЕРЖАНИЕ

ГЕОДЕЗИЯ

Буткевич А. В., *Яковинич Н. Н.* Решение обратной геодезической задачи с помощью изображения эллипсоида на шаре с минимальными искажениями . . . 3
Виленский В. А. Оценка точности азимутального ряда . . . 8
Власенко С. Г., Заблоцкий Ф. Д. Учет вертикальной рефракции по колебаниям изображений визирных целей в полярном районе . . . 16
Волжанин С. Д. Уравнивание геодезических сетей методом L_p-оценок . . . 20
Волосецкий Б. И. Определение расстояния и азимута прихода волны при изучении спектральных характеристик поверхностных сейсмических волн 23
Гожий А. В. О точности детальной разбивки круговой кривой способом угловой засечки . . . 28
Девятириков А. Л., Дербал А. И. О применении радиоустройств при съемке подземных коммуникаций . . . 32
Кириллов В. Г. О влиянии ошибок исходных пунктов на точность преобразования пространственных прямоугольных координат . . . 36
Кметко И. Н., Пандул И. С., Литинский В. О. Влияние электромагнитного поля ЛЭП на результаты измерения зенитных расстояний . . . 42
Костецкая Я. М. Учет исходных дирекционных углов при оценке поперечных сдвигов пунктов трилатерационных сетей . . . 45
Куновский И. Н. О точности отслеживания звезд экваториальной платформой камеры АФУ-75 . . . 47
Лошкарев Н. А., *Перепечкин А. А.* Применение χ^2-критерия для построения критической области многомерных случайных векторов невязок и смещений точек . . . 51
Магуськин Б. Ф. О Лапласовском обосновании метода наименьших квадратов . . . 59
Марченко А. Н. О построении ковариационной функции аномального поля . . . 66
Марыч М. И., Гудз И. Н. О вычислении уклонений отвеса и высот квазигеоида во втором приближении . . . 75
Мещеряков Г. А. О представлении потенциала планеты суммой потенциалов плоских слоев . . . 79
Монин И. Ф. К теории двухгруппового уравнивания коррелированных величин . . . 86
Перович Л. Н., Лисевич М. Ф., Маркив В. М. О точности геометрического нивелирования в газотурбинных цехах . . . 90
Рудый Р. М. К анализу рельефа местности . . . 93
Субботин И. Е., Староверов В. С., Шевчук П. М., Бондарь А. Л. О современных вертикальных движениях земной коры вдоль трассы Тернополь—Курск . . . 98
Третяк К. Р. Оптимизация проектирования схем измерений в инженерно-геодезических сетях . . . 102
Файвужинский Ю. Л. Основные этапы геодезических измерений в строительном производстве и некоторые пути их автоматизации . . . 111