УДК 528.3

А. Е. ФЕДОРИЩЕВ, С. М. РОМАНЮК

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПОПРАВКИ ЗА ВЕРТИКАЛЬНУЮ РЕФРАКЦИЮ ПОСРЕДСТВОМ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ КРИВОЙ

При выполнении геодезических измерений для более строгого учета и введения поправок за вертикальную рефракцию расчетным методом необходимо подобрать уравнение, которое бы математически наиболее правдоподобно описывало рефракционную кривую светового луча.

Такое уравнение можно получить, решая функционал [2]

$$I = \int n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx\,. \tag{1}$$

Здесь $n(x, y)$ — показатель преломления как функция от x, y; y' — первая производная рефракционной кривой по x.

Для решения (1) используем дифференциальное уравнение второго порядка Эйлера [1]

$$F'_y - F''_{xy'} - F''_{yy'}\,y' - F''_{y'y'}\cdot y'' = 0. \tag{2}$$

Раскроем производные в (2) и запишем их в виде

$$F'_y = \frac{\partial n}{\partial y}\sqrt{1 + y'^2}\,; \quad (3) \qquad F''_{xy'} = \frac{\partial n}{\partial x}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\,; \tag{4}$$

$$F''_{yy'} = \frac{\partial n}{\partial y}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\,; \quad (5) \qquad F''_{y'y'} = \frac{n}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}\,. \tag{6}$$

Обозначив $\partial n/\partial x = q$, $\partial n/\partial y = p$ и подставив (3)—(6) в (2), получим

$$p\sqrt{1 + y'^2} - \frac{qy'}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{py'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{ny''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = 0, \tag{6'}$$

или после несложных преобразований будем иметь

$$ny'' + qy' - py'^3 + qy'^3 = p. \tag{7}$$

Решение (7) связано с математическими трудностями, но задачу можно упростить, если учесть геометрию оптического луча в пространстве.

Известно, что

$$y' = \operatorname{tg}\delta, \tag{8}$$

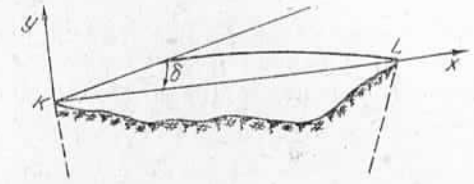
где δ — угол между касательной к кривой и направлением визирного луча.

Если на рисунке за ось x принять направление линии визирования KL, а за ось y — линию, перпендикулярную оси x в точке

K, которую считаем началом данной системы координат, то δ будет поправкой за вертикальную рефракцию.

Положим, что $\delta_{max} = 10'$, тогда $y' = 0{,}003$. Соответственно получим $y'^2 = 3\cdot10^{-7}$ и $y'^3 = 3\cdot10^{-10}$. Эти два члена вследствие их малости можно приравнять нулю, а (7) записать в упрощенном виде

$$ny'' + qy' = p. \tag{9}$$



Траектория светового луча.

Для решения (9) используем полином вида

$$y = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i. \tag{10}$$

Вычислив из (10) первую и вторую производные и подставив их в (9), получим

$$n\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\,a_i x^{i-2} + q\sum_{i=0}^{m} ia_i x^{i-1} = p. \tag{11}$$

Группируя члены (11) по степеням неизвестного x, запишем

$$\sum_{i=0}^{m}\,[i(i+1)\,a_{i+1}n + ia_i q]\,x^{i-1} = P. \tag{12}$$

Приравнивая коэффициенты при неизвестных левой и правой частях уравнения (12), получаем систему уравнений с коэффициентами $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i$:

$$\begin{gathered} 2na_2 + qa_1 = p, \\ 2\cdot 3nd_3 + 2qa_2 = p, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i(i+1)\,na_{i+1} + iqa_i = p. \end{gathered} \tag{13}$$

Решая систему (13), найдем значения всех коэффициентов через a_1:

$$a_2 = \frac{p - qa_1}{2n}\,,$$

$$a_3 = \frac{q(p - qa_1)}{2\cdot 3n^2}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_i = (-1)^i \frac{q^{i-2}(p - qa_1)}{i!\, n^{i-1}}. \tag{14}$$

С учетом (14) уравнение (10) перепишем в виде

$$y = \sum_{i=2}^{m} (-1)^i \frac{q^{i-2}(p - qa_1)}{i!\, n^{i-1}} + a_0 + a_1 x. \tag{15}$$

Принимая во внимание условие, что рефракционная кривая проходит через точку наблюдения и точку визирования, расстояние между которыми l, уравнение (9) и (15) будем решать при граничных условиях:

$$x = 0 \longrightarrow y = 0,$$
$$x = l \longrightarrow y = 0. \tag{16}$$

Учитывая (15) и (16), находим системы уравнений для вычисления коэффициентов a_0 и a_1:

$$a_0 = 0,$$
$$a_1 l + \sum_{i=2}^{m} (-1)^i \frac{q^{i-2}(p - qa_1)}{i!\, n^{i-1}} = 0. \tag{17}$$

Группируя по a_1 и сокращая на l, второе уравнение системы (17) перепишем в виде

$$a_1 \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \frac{q^{i-1} l^{i-1}}{i!\, n^{i-1}} + p \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \frac{q^{i-1} l^i}{(i+1)!\, n^i} = 0. \tag{18}$$

Откуда

$$a_1 = -\frac{p \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \frac{q^{i-1} \cdot l^i}{(i+1)!\, n^i}}{\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \frac{q^{i-1} \cdot l^{i-1}}{i!\, n^{i-1}}}. \tag{19}$$

Сделав соответствующие преобразования, получим окончательное выражение для вычисления

$$a_1 = -\frac{pl}{2n}\left(1 + \frac{ql}{6n} - \frac{q^3 l^3}{360 n^3} - \frac{q^5 l^5}{45360\, n^5} - \dots\right). \tag{20}$$

Для вычисления остальных неизвестных коэффициентов a_i выражение в круглых скобках уравнения (20) обозначим через A.
Тогда

$$a_i = (-1)^i \left[\frac{pq^{i-2}}{i!\, n^{i-1}} - \frac{pq^{i-1} l}{2n^i\, i!} \cdot A\right]. \tag{21}$$

С учетом (20) и (21) уравнение (15) перепишем в виде

$$y = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i p \left(\frac{q^{i-2}}{i!\, n^{i-1}} \frac{q^{i-1} l}{2i!\, n^i} \cdot A\right) x_i. \tag{22}$$

Для оценки полученного решения и сохранения необходимого числа членов ряда примем $n = 1$, $q_{\max} \simeq p_{\max} \simeq 10^{-7}$ 1/М, $l_{\max} = 3 \times \times 10^4$ м.

С учетом принятых значений, умножая второе слагаемое в круглой скобке (22) на A, при $i = 1$ находим, что третий член ряда

$$\frac{xpq^3 l^4}{2 \cdot 360 n^4} = \frac{243 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{20}}{720} = 0{,}3 \cdot 10^{-8};$$

при $i = 2$ второй член ряда

$$\frac{x^2 pq^2 l^2}{24\, n^3} = \frac{10^{-21} \cdot 81 \cdot 10^{16}}{24} = 3{,}4 \cdot 10^{-5};$$

при $i = 3$ первый член ряда

$$\frac{x^3 pq^2 l}{12\, n^3} = \frac{10^{-21} \cdot 81 \cdot 10^{16}}{12} = 6{,}7 \cdot 10^{-5}.$$

Отсюда с точностью до $6{,}7 \cdot 10^{-5}$ формулу (22) можно записать в следующем виде:

$$y = -\frac{pl}{2}\left(1 + \frac{ql}{6}\right)x + \frac{p}{2}\left(1 + \frac{q^2 l^2}{12}\right)x^2 - \left[\frac{pq}{6}\left(1 + \frac{ql}{2}\right)\right]x^3. \tag{23}$$

Уравнение (23) описывает рефракционную кривую оптического луча, распространяющегося в реальной атмосфере между точками, отстоящими друг от друга на расстояние l.

В нем градиенты p и q в общем случае рассматриваются как функции от x и y. В частных случаях они могут быть постоянными или равными нулю.

С учетом сказанного, производная уравнения (23) будет иметь вид

$$y' = -\left[\frac{pl}{2}\left(1 + \frac{ql}{6}\right)\right]' x - \left[\frac{pl}{2}\left(1 + \frac{ql}{6}\right)\right] + \left[\frac{p}{2}\left(1 + \frac{q^2 l^2}{12}\right)\right] x^2 +$$
$$+ 2\left[\frac{p}{2}\left(1 + \frac{q^2 l^2}{12}\right)\right] x - \left[\frac{pq}{6}\left(1 + \frac{ql}{2}\right)\right]' x^3 - 3\left[\frac{pq}{6}\left(1 + \frac{ql}{2}\right)\right] x^2. \tag{24}$$

Для определения поправки за рефракцию предложенным методом необходимо вычислить значение (24) в точке наблюдения, учитывая при этом зависимость (8):

$$\delta'' = -\frac{\rho'' p_0 l}{2}\left(1 + \frac{q_0 l}{6}\right), \tag{25}$$

где p_0, q_0 — градиенты показателя преломления в точке наблюдения ($x=0$, $y=0$).

Как видно из полученной формулы (25), поправка за вертикальную рефракцию зависит от длины визирного луча l, вертикального p и горизонтального q градиентов показателя преломления, вычисленных только в точке наблюдения.

Список литературы: 1. *Зельнович Я. Б., Мышкис А. Д.* Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1967. 2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. — М.: Наука, 1974, т. 4.

Статья поступила в редколлегию 27. 03. 84

УДК 528.3

С. Н. ХОДОРОВ

О ВЫБОРЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ ПРИ МНОГОРАЗРЯДНОМ ПОСТРОЕНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ МЕТОДОМ ТРИАНГУЛЯЦИИ

На крупных строительных объектах, при застройке больших жилых массивов и строительстве некоторых уникальных сооружений геодезическое обоснование может создаваться многоразрядными построениями. Качество априорной оценки точности таких построений в значительной степени определяется правильным выбором коэффициента понижения, или обеспечения точности [1]. В научно-технической геодезической литературе приводятся различные значения этого коэффициента — от 1,2 до 8,0. Вероятностное обоснование этого коэффициента выполнено в [2, 3], однако в практике проектирования инженерно-геодезических сетей интервал принимаемых для него значений довольно велик. Поэтому в настоящей работе ставится цель экспериментального определения оптимального значения коэффициента обеспечения точности k.

Для исследования составлена модель четырехразрядной сети, показанная на рисунке. Рассматриваемые многоразрядные построения представлены триангуляцией, в которой все треугольники запроектированы равносторонними, длины их сторон соответственно по очередям построения составляют 4,7, 2,7, 1,6 и 0,9 км. Средние квадратические ошибки измерения угла соответствующих этапов построения согласно государственным инструкциям приняты равными 2″, 5″, 10″ применительно к триангуляции 4 класса, I и II разрядов и 15″ для съемочного обоснования. Исходными считаются пункты *1* и *2* с учетом безошибочности их положения.

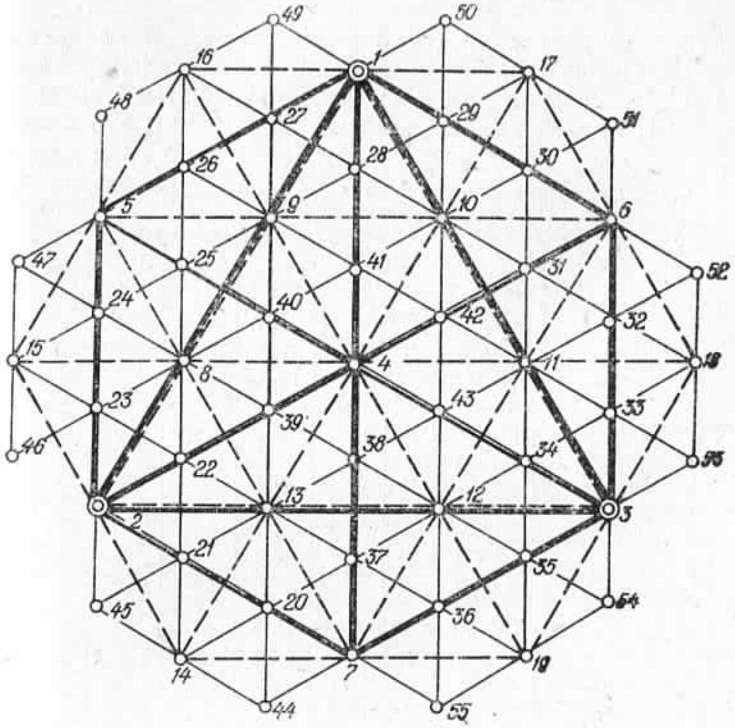
Оценка точности принятой модели четырехразрядной сети произведена с учетом строгого уравнивания на ЭВМ ЕС-1022 по следующей схеме:

оценка точности I разряда;
совместная оценка точности сетей I и II разрядов;

совместная оценка точности сетей I, II и III разрядов;
совместная оценка точности сетей I, II, III и IV разрядов.

При этом для каждого последующего разряда учитывали ошибки исходных данных пунктов предыдущих разрядов. Оценочные величины находили с помощью больших и малых полуосей эллипса ошибок и средних квадратических ошибок линий и их направлений.

Если m_0 — ошибки исходных пунктов 1 и 2, а μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса, отождествляемая со сред-



Модель четырехразрядной сети:
сеть I разряда; сеть II разряда;
сеть III разряда; сеть IV разряда.

ней квадратической ошибкой измерения угла соответствующего разряда, то корреляционная матрица примет вид

$$Q_0 = \frac{m_0^2}{\mu_1^2}. \qquad (1)$$

С учетом (1) нормальная матрица

$$N_1 = N_0 + A_1^T A_1, \quad (2) \quad \text{где} \quad N_0 = Q_0^{-1}. \quad (3)$$

Для I разряда сети

$$Q_1 = N_1^{-1}; \quad (4) \quad K_1 = \mu_1 \sqrt{Q_1}; \quad (5) \quad V = \mu_1 G^T Q_1 G, \quad (6)$$