

С. С. ЕВСЕЕВ, Э. М. ШАТАЛОВА

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ ПОПРАВОК ЗА РЕЛЬЕФ В СИЛУ ТЯЖЕСТИ

Применение более совершенных приборов в гравиметрической съемке (гравиметров) позволяет повышать точность определений силы тяжести до 0,1—0,05 мгл. Естественно, что все поправки, вводимые в наблюденное значение силы тяжести, должны обеспечивать такую же точность. Цель нашей работы — найти более простой метод определения поправки за рельеф, который бы обеспечивал нужную точность.

Влияние возмущающих масс, заключенных между уровенной поверхностью какого-либо пункта наблюдений и физической поверхностью Земли, на значение силы тяжести в этой точке может быть вычислено по формуле [1]

$$\Delta g_T = f\delta \int_0^{2\pi} \int_0^r \left[1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + H^2}} \right] dz dr. \quad (1)$$

В подынтегральном выражении формулы (1) H есть функция от r и α . Она имеет сложный вид, если принимать во внимание все массы, окружающие пункт, где определяется поправка за рельеф. Для упрощения вида функции $H = f(r, \alpha)$ всю окружающую местность обычно разбивали системой концентрических окружностей и радиально расходящихся лучей на ячейки (секторы). Влияние такой ячейки с номером i на значение силы тяжести определяется формулой [1]

$$\Delta g_T^i = \frac{2\pi f\delta}{n} [r_{i+1} - r_i + \sqrt{r_i^2 + H^2} - \sqrt{r_{i+1}^2 + H^2}]. \quad (2)$$

Этот метод положен в основу построения палетки Лукавченко для определения поправок за рельеф и в настоящее время наиболее распространен. Такой способ учета влияния масс рельефа требует получения средних высот в пределах определенным образом разбитых участков местности. При всей простоте способа он не лишен существенных недостатков. Даже при наличии специальных палеток объем вычислений относительно велик. Нахождение средних значений высот в условиях сложного рельефа — довольно трудоемкая операция, требующая большого внимания.

Особенно существенно, что вследствие замены истинной поверхности ячейки горизонтальной плоскостью при больших положительных углах наклона происходит завышение величины поправок, носящее систематический характер. Из формулы (1) видно, что с увеличением

радиуса r значение поправки уменьшается. Следовательно, при замене действительной поверхности ячейки плоскостью, проходящей на средней высоте ячейки (см. рисунок) в интервале $r_{H_1} - r_{H_{cp}}$ массы искусственно увеличиваются, а в интервале $r_{H_{cp}} - r_{H_2}$ — уменьшаются. Компенсация не происходит, поскольку влияние увеличенных масс в интервале $r_{H_1} - r_{H_{cp}}$ больше, чем влияние уменьшенных масс в интервале $r_{H_{cp}} - r_{H_2}$.

Был предложен и другой метод учета влияния масс рельефа на значение силы тяжести [1]. Суть его состоит в том, что в каждом отдельном направлении на местности вид функции $H = f(r, \alpha)$ определяется уравнением гиперболы. Тогда формула поправки с учетом только первого члена разложения подынтегральной функции в ряд будет иметь вид [1]

$$\Delta g_1^i = \frac{2\pi f \delta}{n} \frac{r_{i+1} - r_i}{2(r_{i+1} + r_i)} \left[\frac{H_i^2}{r_i} + \frac{H_{i+1}^2}{r_{i+1}} \right]. \quad (3)$$

Поскольку не все формы рельефа могут подходить под вид гиперболы, формула (3) будет давать значение Δg с недостаточной точностью. К числу недостатков формулы (3) можно отнести и тот факт, что в ней учтен только первый член разложения в ряд подынтегральной функции. Кроме того, на окончательный результат при вычислении поправок по методу гипербол отрицательно влияет тот факт, что поправка учитывается по лучевой палетке, а не по площадной, как это было в предыдущем случае.

Для определения поправки за рельеф нами предложена формула численного интегрирования Гаусса, наиболее точная из всех существующих. Сущность ее заключается в нахождении значений подынтегральной функции в строго фиксированных точках $u_1, u_2, \dots, u_n$ [3]. Значение интеграла I в интервале от a до b определяется формулой

$$I = \int_a^b f(x) dx = (b - a) [R_1 \varphi(u_1) + R_2 \varphi(u_2) + \dots + R_n \varphi(u_n)], \quad (4)$$

где $(b - a)$ — интервал интегрирования;

$\varphi(u)$ — подынтегральная функция в фиксированной точке;

$R_1, R_2, \dots, R_n$ — определенные коэффициенты, зависящие от выбранного числа точек в интервале.

Мы сравниваем методы средних высот, гипербол и предлагаемый нами путем испытания их на таких моделях местности, у которых зависимость $H = f(r)$ выражается формулами, дающими возможность провести интегрирование (1) до конца.

Применялись следующие модели:

1) наклонная плоскость, уравнение которой имеет вид

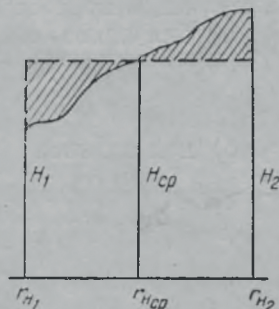
$$H = r \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

в нашем случае $\operatorname{tg} \alpha = 0,1$;

2) эллипс, уравнение которого

$$H = b \sqrt{1 - \frac{(r - a)^2}{a^2}},$$

где $a^2 = 6,25$, $b^2 = 0,25$;



Вертикальный разрез
ячейки.

3) гипербола, уравнение которой

$$H = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} r^2 - b^2},$$

где $\frac{b^2}{a^2} = 0,0094$; $b^2 = -0,015$.

После подстановки этих выражений в формулу (1) в результате проведенного интегрирования по r получим конечные формулы, по которым можно вычислить теоретическое значение поправки Δg_T на соответствующей модели:

а) для наклонной плоскости

$$\Delta g_T = \frac{2\pi f \delta}{n} r(1 - \cos \alpha);$$

б) для эллипса

$$\Delta g_T = \frac{2\pi f \delta}{n} \left[r - \frac{\sqrt{0,96 r^2 + 0,2} r}{0,96} + 0,2448 \lg (1,92 r + \right. \\ \left. + 0,2 + 1,9596 \sqrt{0,96 r^2 + 0,2} r) \right];$$

с) для гиперболы

$$\Delta g_T = \frac{2\pi f \delta}{n} \left[r - \frac{\sqrt{1,0094 r^2 + 0,015}}{1,0094} \right].$$

Кроме того, все три метода были испытаны на примере местности, был взят профиль в районе Карпат. Все вычисления проводились только по одному лучу-направлению, т. е. при условии $\alpha = \text{const}$ в формуле (1), так как способ интегрирования по α не вызывает сомнений. Результаты вычислений приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Таблица учета поправок в зоне 500—5000 м

Модели	Теоретическое значение	Метод Гаусса	Колич. точек определений H	Относит. ошибка, %	Метод средн. высот	Колич. точек определений H	Относит. ошибка, %	Метод гипербол	Колич. точек определений H	Относит. ошибка, %
Наклонная плоскость	22,93	22,93	4	—	24,72	6	7,8	23,40	9	2
Эллипс	131,76	131,98	4	0,2	135,40	6	2,8	143,17	9	8,7
Гипербола	35,46	34,32	4	3,2	38,00	6	7,2	35,94	9	1,4
Рельеф местности	21,06	21,40	6	1,6	23,20	6	10,2	23,41	9	11,1

Из приведенных таблиц видно, что метод Гаусса позволяет вычислить поправку с большей точностью, чем методы средних высот, гипербол. По сравнению с методом средних высот этот метод позволяет избежать систематического накопления ошибок и уменьшить объем вычис-

Сводная таблица с учетом поправок за центральную зону (0—500 м)

Модели	Теоретическое значение	Метод Гаусса	Колич. точек определений H	Относит. ошибка, %	Метод. средн. высот	Колич. точек определений H	Относит. ошибка, %	Метод гипербола	Колич. точек определений H	Относит. ошибка, %
Наклонная плоскость	25,45	25,45	7	0	27,32	14	7,3	26,00	17	2,1
Эллипс	290,26	288,18	7	0,7	298,00	14	2,7	473,70	17	63
Рельеф местности	28,06	27,85	10	0,8	30,80	14	9,8	30,97	17	10,4

Примечание: Значения поправок в таблицах даны в 0,01 мгал; за теоретическое значение поправки в примере рельефа местности принято значение Δg , вычисленное по формуле численного интегрирования Симпсона с количеством точек, в которых определялось значение высоты H , равным 50. Большая относительная ошибка (63%) при испытании метода гипербола на модели эллипса объясняется тем, что эллипс вблизи начальной точки имеет нереально выпуклую поверхность.

Таблица 3

Таблица для учета влияния рельефа на g в радиусе 0—5 км
при $\delta=2,0$; $n=16$ (H_m , $\Delta g=0,01$ мгал)

$r_1=35$ м		$r_2=165$ м		$r_3=335$ м		$r_4=465$ м		$r_5=669$ м		$r_6=1250$ м		$r_7=1831$ м		$r_8=2338$ м		$r_9=3500$ м		$r_{10}=4662$ м	
H	Δg	H	Δg	H	Δg	H	Δg	H	Δg	H	Δg	H	Δg	H	Δg	H	Δg	H	Δg
4	0	14	0	20	0	40	0	30	0	45	0	80	0	100	0	120	0	200	0
8	1	26	1	50	1	90	1	60	1	90	1	170	1	170	1	180	1	300	1
12	2	38	2	75	2	140	2	90	2	135	2	245	2	240	2	260	2	450	2
16	4	44	3	90	3	170	3	110	3	165	3	305	3	300	3	320	3	520	3
18	5	52	4	105	4	200	4	130	4	195	4	350	4	330	4	380	4	600	4
20	6	60	5	120	5	230	5	145	5	210	5	395	5	360	5	420	5	680	5
22	7	66	6	135	6	260	6	160	6	240	6	440	6	390	6	460	6	730	6
24	8	70	7	145	7	290	7	175	7	255	7	485	7	420	7	500	7	790	7
26	9	78	8	155	8	310	8	185	8	270	8	515	8	450	8	540	8	840	8
28	10	82	9	165	9	340	9	200	9	295	9	545	9	480	9	570	9	890	9
30	11	86	10	180	10	360	10	210	10	310	10	575	10	510	10	600	10	950	10
32	12	94	11	190	11	390	11	220	11	320	11	605	11	530	11	630	11	1000	11
34	13	98	12	200	12	420	12	230	12	335	12	635	12	560	12	660	12	1040	12
36	14	102	13	210	13	450	13	240	13	350	13	665	13	580	13	690	13	1090	13
38	15	108	14	220	14	480	14	250	14	365	14	695	14	610	14	720	14	1130	14
42	16	114	15	230	15	510	15	260	15	375	15	725	15	630	15	740	15	1170	15
		118	16	240	16			270	16	390	16	750	16	650	16	760	16	1210	16
		123	17	250	17			280	17	405	17	770	17	680	17	790	17	1260	17
		128	18	260	18			290	18	420	18	800	18	700	18	810	18	1290	18
		134	19	270	19			300	19	430	19	825	19	720	19	840	19	1330	19
		138	20	280	20			310	20	440	20	840	20	740	20	860	20	1360	20
		142	21	290	21			320	21					760	21	880	21	1400	21
		148	22	300	22			325	22					780	22	900	22	1440	22
		154	23	315	23									790	23	920	23	1470	23
		160	24	325	24									810	24				
		166	25	340	25									830	25				
		170	26											850	26				

лений, так как отпадает необходимость нахождения средних высот в ячейках и уменьшается количество точек, где определяются высоты по карте. Обладая тем же недостатком, что и метод гипербол (применяется лучевая палетка), метод Гаусса позволит добиться гораздо более высокой точности и избежать большего объема вычислительных работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимбирев Б. П. Теория фигуры Земли. М., Геодезиздат, 1961.
2. Лукавченко П. И. Гравиметрическая разведка на нефть и газ. М., Гостоптехиздат, 1956.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1966.

Работа поступила
5 марта 1968 г.