

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕМОВ ВЫНУТОЙ ГОРНОЙ ПОРОДЫ

Технологическая схема определения объемов вынутой горной породы по материалам стереофотосъемки была полностью заимствована у проверенного временем тахеометрического метода. Способы среднего арифметического, вертикальных и горизонтальных сечений надолго стали доминирующими и для стереофотограмметрических методов.

Однако в таком виде способы определения объемов не использовали всей информации, которую содержали снимки. Начиная с шестидесятых годов начались поиски новых стереофотограмметрических способов, среди которых необходимо выделить работу Н. И. Иванова и Б. С. Пузанова [6], которая послужила началом крупных исследований в этом направлении. По разным причинам сложилось так, что такие способы были разработаны в основном

для стереофотограмметрического метода наземной съемки [1, 6, 18].

В настоящее время существуют десятки способов определения объемов вынудой горной породы. Среди них можно выделить несколько работ, в которых предпринята попытка классифицировать существующие способы определения объемов выработанной горной породы [1, 7, 10, 13, 17, 18, 20].

Рассмотрим классификацию способов определения объемов вынудой горной породы, предложенную А. И. Корбачковым и Е. З. Криволаповым [7]. Авторы выделяют способы горизонтальных, вертикальных сечений, а также среднего арифметического.

Наиболее распространен способ горизонтальных сечений. Сущность его заключается в том, что объем вычисляется как произведение полусуммы площадей горизонтальных сечений на среднюю высоту экскаваторной заходки [8]:

$$V = \frac{S_0 + S_1}{2} h, \quad (1)$$

где V — объем заходки; S_0, S_1 — площади сечений соответственно по верхней и нижней бровкам уступа; h — средняя высота заходки.

Площади сечений вычисляют по одной из формул [13]:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n Y_i (X_{i+1} - X_{i-1}); \quad (2)$$

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n X_i (Y_{i+1} - Y_{i-1}); \quad (3)$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^n X_{i+1} Y_i - \sum_{i=0}^n X_i Y_{i+1} \right). \quad (4)$$

В некоторых статьях формулы (1) — (4) записывают в несколько измененном виде. Например, в [1, 4, 16—18, 20] площади сечений и высоты заходов представлены в виде функции измеренных координат и параллаксов точек фототеодолитных снимков.

При значительной высоте уступа объем заходки разбивают на несколько частей, а общий объем получают как сумму элементарных объемов [20].

Исходя из сказанного выше, общую формулу способа горизонтальных сечений запишем следующим образом:

$$V = \left(\frac{S_0 + S_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} S_i \right) h. \quad (5)$$

Здесь высоты всех элементарных блоков выбраны равными.

Способ вертикальных сечений применим, когда положение уступов фиксируется на вертикальных сечениях. В этом случае

общий объем блока вычисляют как сумму объемов тел, заключенных между сечениями.

Площади вертикальных сечений в этом случае находят по формулам, аналогичным (2) — (4). Для вычисления же объема авторами предлагаются различные формулы в зависимости от положения сечений относительно оси съемки. Чаще всего выделяют случаи, когда сечения перпендикулярны или параллельны оси съемки [1, 10, 17, 20 — 23]. При всем своем различии сущность этих способов одна — объем вычисляют как произведение полусуммы площадей смежных сечений на расстояние между ними.

Если расстояния между сечениями одинаковые, формула имеет вид [8]

$$V = \left(\frac{S_0 + S_n}{2} + \sum_{i=1}^n S_i \right) a, \quad (6)$$

где a — расстояние между сечениями; S_i — площадь i -го сечения,

Некоторые авторы выделяют другие виды сечения тела, объем которого необходимо вычислить. В частности, К. Бюргер [18] особо выделяет «метод по характеристикам», сущность которого заключается в сечении тела плоскостями, «проходящими по характерным линиям». Другими словами, «метод по характеристикам» является способом сечений с переменными расстояниями между сечениями.

Сравнивая рабочие формулы способов горизонтальных и вертикальных сечений, а также метода по характеристикам, можно сделать вывод, что они различаются только видом расчленения тела на элементарные составляющие, но не способом определения объема. Следовательно, целесообразно рассматривать «способ сечений» независимо от расположения плоскостей сечений.

У разных авторов способ среднего арифметического имеет различные названия. Так, в [1, 3, 5, 6, 9, 16] его называют способом горизонтальной или вертикальной сеток, в [17] — аналитическим ортогональным способом, в [18] — методом блокировки или методом Гайбаха, в [13] — способом объемной палетки. Для вычисления объема этим способом все авторы предлагают разделение тела на элементарные геометрические фигуры, координаты вершин которых известны. Большинство авторов использует сетку квадратов (отсюда и название), другие за основу элементарной части берут не квадрат, а другие фигуры [5, 9, 19]. Но во всех случаях тело разбивают на элементарные усеченные призмы с измеренными или вычисленными координатами всех вершин. Наверное, этот способ целесообразно называть «способом усеченных призм», так как во многих работах термином «среднее арифметическое» обозначают совершенно другой способ. Например, в инструкции [8] способы среднего арифметического и горизонтальных сечений объединены в один.

Сущность способа арифметической середины, принятого в [11, 18], заключается в замене тела, объем которого подлежит вычислению, кубом с измеренной площадью основания и высотой,

полученной как разность отметок верхнего и нижнего оснований. Фактически это частный случай способа сечений.

Рабочую формулу для способа усеченных призм можно записать следующим образом:

$$V = \sum_{i=0}^n \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i, \quad (7)$$

где $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ — разности координат вершин усеченной призмы.

Существует еще несколько способов, которые фактически являются частными случаями способов сечений [12] или усеченных призм [14, 15]. Вместе с тем в них используют принципиально другие формулы. На этих способах мы остановимся ниже, предварительно рассмотрев математический аппарат способа сечений в том виде, в котором его наиболее часто используют. Для этого запишем объем тела как определенный интеграл

$$V = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx. \quad (8)$$

Здесь x_0, x_n — координаты границ блока; $f(x) = S$ — функция, характеризующая площадь сечения.

Используя численные методы вычисления определенного интеграла, получаем

$$V = \int_{x_0}^{x_n} S dx = (x_n - x_0) \sum_{i=0}^n H_i S_i = n \Delta x \sum_{i=0}^n H_i S_i, \quad (9)$$

где $H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{i(n+1)}}{q-i} dq$ — коэффициенты Котеса; Δx —

шаг интерполирования; $q^{[n+1]} = q(q-1)(q-2) \dots (q-n)$.

Вычислим коэффициенты Котеса, учитывая, что объем части тела на практике определяется между двумя смежными сечениями, т. е. при $n=1$:

$$H_0 = - \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = -\frac{1}{2}, \quad H_1 = \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q-1} dq = \frac{1}{2}.$$

В таком случае

$$V = \Delta x \sum_{i=0}^1 H_i S_i = \frac{S_0 + S_1}{2} \Delta x + R_1, \quad (10)$$

где R_1 — остаточный член погрешности метода.

Полученная формула основана на линейном интерполировании функции $f(x_i) = S_i$ между сечениями S_0 и S_1 и полностью совпадает

с рабочей формулой способа сечений. Следовательно, в рассматриваемом способе применен метод линейного интерполирования.

Вычислим коэффициенты Котеса при $n=2$:

$$H_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 (q-1)(q-2) dq = \frac{1}{6},$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \int_0^2 q(q-2) dq = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 q(q-1) dq = \frac{1}{6}.$$

Имея значения коэффициентов, запишем объем элементарной части тела в виде

$$V = 2 \Delta x \sum_{i=0}^n H_i S_i = \frac{\Delta x}{3} (S_0 + 4 S_1 + S_2) + R_2. \quad (11)$$

Здесь S_i — сечения, проходящие через начало элементарной части тела, ее середину и конец; R_2 — погрешность метода.

Полученная формула основана на параболическом интерполировании функции $f(x_i) = S_i$ между сечениями S_0, S_1, S_2 и соответствует рабочей формуле, приведенной в [12], т. е. в методике, предлагаемой автором, используется метод параболического интерполирования для определения объема тела способом сечений.

В случае необходимости можно получить формулы определения объемов тела более высокого порядка точности. Так, при $n=3$ получим

$$V = 3 \Delta x \sum_{i=0}^3 H_i S_i = \frac{3 \Delta x}{8} (S_0 + 3 S_1 + 3 S_2 + S_3) + R_3. \quad (12)$$

Приведем остаточные члены этих методов:

$$R_1 = -\frac{\Delta x^3}{12} f''(\xi), \quad R_2 = -\frac{\Delta x^5}{90} f^{IV}(\xi), \quad R_3 = -\frac{3 \Delta x^5}{80} f^{IV}(\xi). \quad (13)$$

На основании (13) можно утверждать, что при сечении элементарной части тела тремя или четырьмя плоскостями остаточная ошибка будет одного порядка. Сечение же двумя плоскостями приведет к ошибке на два порядка грубее (расстояние между сечениями по всему блоку для всех случаев одинаковое).

При использовании для вычисления объемов способа усеченных призм нет необходимости рассекаать тело плоскостями, в этом случае объем определяют по координатам точек, расположенным

на поверхности данного тела. Следовательно, объем можно представить в виде интеграла по некоторой замкнутой области

$$V = \int \int_{\sigma} f(x, y) dx dy. \quad (14)$$

Пусть сначала область интегрирования — прямоугольник $R\{x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1\}$, тогда $x_1 = x_0 + \Delta x$, $y_1 = y_0 + \Delta y$. Далее имеем

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy. \quad (15)$$

Отсюда, вычисляя внутренний интеграл по формуле трапеции, находим

$$\begin{aligned} V &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\Delta y}{2} (f(x, y_0) + f(x, y_1)) dx = \\ &= \frac{\Delta x \Delta y}{4} (f(x_0, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_1, y_0) + f(x_1, y_1)). \end{aligned} \quad (16)$$

Функция $f(x_i, y_i)$ соответствует в нашем случае значению разности отметок в заданных точках с координатами x_i, y_i . Тогда (16) примет вид

$$V = \frac{\Delta x \Delta y}{4} \sum_{i=0}^3 \Delta z_i = \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (17)$$

где $\Delta z = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 \Delta r_i$.

В этом виде формулу используют в способе усеченных призм.

Если каждую сторону элементарного участка разбивать на два отрезка дополнительной точкой $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_0 + 2\Delta x$ и соответственно $y_1 = y_0 + \Delta y$, $y_2 = y_0 + 2\Delta y$, то появляется возможность вычислить внутренний интеграл (15) по формуле Симпсона. Тогда получим окончательно

$$V = \frac{\Delta x \Delta y}{9} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \lambda_{ij} \Delta z_{ij} + R_4, \quad (18)$$

где коэффициенты λ_{ij} — соответствующие элементы матрицы

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Формулу (18) используют как рабочую в предлагаемом способе определения объемов [14, 15].

Таким образом, классификация способов вычисления объемов вынудой горной породы может быть следующей: способы сечений и усеченных призм.

Рабочие формулы для этих способов различны. В зависимости от требуемой точности можно использовать методы линейного или параболического интерполирования. Критерием для выбора тех или иных методов служат остаточные погрешности.

Список литературы: 1. Беликов И. А. Аналитический метод подсчета вынудого объема горной массы по фотоснимкам наземной стереофотограмметрии. — В кн.: Разработка месторождений полезных ископаемых. Маркшейдерское дело. Киев, 1965, вып. 3. 2. Демидович Б. П., Марон Л. А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970. 3. Добрынин Н. Ф. Определение объема и площади простирания изучаемого объекта фотографическим методом. — В кн.: Аэрофототопография. Новосибирск, 1977, т. 2 (42). 4. Еськов А. М. Аналитический метод определения объемов горных работ при наземной стереофотограмметрической съемке угольных карьеров Кузбасса. — Тр. Кузбас. политех. ин-та, 1970, вып. 20. 5. Жуков Г. П., Дзибель В. Э. Структура и содержание цифровой маркшейдерской модели угольного разреза. — Маркшейдерское дело в социалистических странах, 1979, вып. 8. 6. Иванов Н. И., Пузанов Б. С. Определение объемов земляных и скальных работ по стереопарам фототеодолитной съемки. — Геодезия и картография, 1961, № 2. 7. Корбачков А. И., Криволапов Е. З. Аналитические способы подсчета объемов при наземной стереофото-съемке карьеров. — В кн.: Вопросы маркшейдерского дела на открытых карье-рах. Белгород, 1971, ч. 2. 8. Межотраслевая инструкция по определению и контро-лю добычи и вскрытий на карьерах. — Л.: Недра, 1977. 9. Могильный С. Г., Па-стернак В. С. Вычисление объемов складов на ЭВМ «Минск-32» по материалам аэрофотосъемки. — Маркшейдерское дело в социалистических странах, 1969, вып. 4. 10. Перегудов М. А. Маркшейдерские работы на карьерах и приисках. — М.: Недра, 1980. 11. Рудюк Н. А., Петракова В. Н., Тимушев Г. Н. Применение программирующего микрокалькулятора для вычисления объемов земляных работ по фототеодолитным снимкам. — Рукопись деп. в ВИНТИ 02.03.82, № 1160—82. 12. Смирнов Е. И. Об определении выработанных объемов горной массы. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1981, вып. 34. 13. Справочник по маркшейдерскому делу / Под ред. А. Н. Омельченко. — М.: Недра, 1979. 14. Тренков И., Кацарски И. Фотограмметрический способ определения объемов тел по формуле Симпсона. — Геодезия и картография, 1971, № 9. 15. Трен-ков И., Кацарски И. Повышаване точността на определяне и обеми чрез екстра-поляция. — Геодезия, картография, землеустройство, 1969, № 3. 16. Труфа-нов И. А. Аналитический метод определения объема горных работ по негативам наземной стереосъемки. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1968, вып. 6. 17. Труфанов И. А. Аналитические методы определения объемов горных ра-бот. — В кн.: Исследование по проблемам геодезического и маркшейдерского дела. Иркутск, 1972. 18. Burger K. Volumermittlungsmethod von Lagerslättekörpern, kritisch bearteilt nach Tests an einen Regelkörper. — Mitt. Markscheidw., 1972, 79, № 3. 19. Derglo-Slepniak. Obliczanie objetosci nuseyrow i wykopow na maszyny GEO 2. — Zesz. nauk. AGH, 1971, № 315. 20. Jeteport K., Serafin M., Zielon-ko A. Analiza porownaucha pracochlonności i kosztow stosowanych method ob-liczeń objetosci. — Zesz. nauk. AGH, 1971, N 315. 21. Milazovszky B. Volume determination according to method of perpendicular cross-section parallel to the base line. — Nehezeperi Müsz. egyet közl., 1972, 32. 22. Milosovszky B. Accuracy relations of determination according to the method of perpendicular cross-section according to the base line. — Nehezeperi Müsz. egyet közl., 1972, 32. 23. Sitek Z. Obliczanie objetosci ze zdjec naziemnych przywkorzy — stnin stereokomparatora zaisa i maszyny elektronicznej Odra-1013. — Zesz. nauk. AGH, 1971, № 315.

Статья поступила в редколлегию 20.04.84