МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 9

УДК 528.23

М. И. МАРЫЧ

К ВОПРОСУ ПРИВЕДЕНИЯ ФОРМУЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФИГУРУ ЗЕМЛИ, К РЯДУ ТЕЙЛОРА

М. С. Молоденский предложил новый метод решения его интегрального уравнения для плотности простого слоя и получил формулы для последовательных приближений возмущающего потенциала на физической поверхности Земли [2]. Два первых приближения, как показано в работе [1], приводят к сумме двух первых членов разложения возмущающего потенциала в ряд Тейлора по степеням высоты рельефа Земли, причем вертикальные градиенты аномалий силы тяжести вычисляются по формуле Нумерова. Если в качестве физической поверхности Земли, на которой заданы аномалии силы тяжести, принять сферу, то возмущающий потенциал, как известно, определится формулой Стокса. Попытаемся получить этот результат, используя метод последовательных приближений Молоденского, а также путем преобразований разложения возмущающего потенциала в ряд Тейлора.

1. Найдем методом Молоденского значения возмущающего потенциала на сфере радиуса $\varrho=a+H$, где a — средний радиус Земли. Прежде всего заметим, что при $H=\text{const}$ формула Молоденского совпадает с формулой Стокса. Однако здесь интегрирование выполняется не по сфере радиуса ϱ, а по сфере радиуса a. Это объясняется тем, что при выводе формулы для общего случая были отброшены малые величины, зависящие от H. Поэтому будем исходить из интегрального уравнения

$$2\pi\varphi = \Delta g + \frac{3}{2}\int \varphi \frac{d\sigma}{r},$$

где Δg — аномалия силы тяжести;

$r = 2\sin\frac{\psi}{2}$;

ψ — угол, образованный радиусами-векторами данной и текущей точек;

$d\sigma$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса, плотность простого слоя, распределенного на сфере радиуса ϱ. Вводя новую функцию

$$\chi = \frac{\rho^2}{a^2}\varphi,$$

имеем

$$2\pi\chi = \frac{\rho^2}{a^2}\Delta g + \frac{3}{2}\int \chi \frac{d\sigma}{r}.$$

С помощью малого параметра $k (0 \leqslant k \leqslant 1)$ можно написать

$$2\pi \sum_{n=0}^{\infty} k^n \chi_n = \frac{\bar{\rho}^2}{a^2} \Delta g + \frac{3}{2} \int \sum_{n=0}^{\infty} k^n \chi_n \frac{d\sigma}{r},$$

где $\bar{\rho} = a + kH$. Ряды, входящие в левую и правую части уравнения, должны быть равны при всех значениях k, поэтому множители при k^n в обеих частях уравнения должны быть равны между собой. Таким образом, получаем

$$2\pi\chi_n - \frac{3}{2} \int \chi_n \frac{d\sigma}{r} = G_n,$$

где

$$G_0 = \Delta g, \; G_1 = \frac{2H}{a} \Delta g, \quad G_2 = \frac{H^2}{a^2} \Delta g, \; G_{n \geqslant 3} = 0.$$

Решая эти интегральные уравнения, находим

$$\chi_n = \frac{G_n}{2\pi} + \frac{3}{(4\pi)^2} \int G_n s(\psi) \, d\sigma,$$

а также

$$\int \chi_n \frac{d\sigma}{r} = \frac{1}{4\pi} \int G_n s(\psi) \, d\sigma, \tag{1}$$

где $s(\psi)$ — функция Стокса. Возмущающий потенциал, определяемый формулой

$$T = \frac{a^2}{\rho} \int \chi \frac{d\sigma}{r}, \tag{2}$$

находим, как и вспомогательную функцию χ, путем последовательных приближений, т. е.

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n,$$

где каждое слагаемое T_n содержит высоту H лишь в степени n. Таким образом, принимая во внимание выражения (1) и (2), получаем

$$T_0 = a \int \chi_0 \frac{d\sigma}{r} = \frac{a}{4\pi} \int \Delta g \, s(\psi) \, d\sigma;$$

$$T_1 = a \int \chi_1 \frac{d\sigma}{r} - H \int \chi_0 \frac{d\sigma}{r} = \frac{H}{4\pi} \int \Delta g \, s(\psi) \, d\sigma;$$

$$T_2 = a \int \chi_2 \frac{d\sigma}{r} - H \int \chi_1 \frac{d\sigma}{r} + \frac{H^2}{a} \int \chi_0 \frac{d\sigma}{r} = 0;$$

$$T_{n \geqslant 3} = 0.$$

Следовательно,

$$T = \frac{\rho}{4\pi} \int \Delta g \, s(\psi) \, d\sigma. \tag{3}$$

Итак, если аномалии Δg заданы на сфере, то процесс последовательных приближений Молоденского приводит к формуле Стокса.

2. Воспользуемся разложением возмущающего потенциала в ряд Тейлора

$$T = \frac{a}{4\pi}\int\left(\Delta g - H\frac{d\Delta g}{d\rho} + \frac{H^2}{2}\frac{d^2\Delta g}{d\rho^2} - \cdots\right) s(\psi)\, d\sigma + \frac{dT}{d\rho}H - \frac{1}{2}\frac{d^2 T}{d\rho^2}H^2 + \cdots \tag{4}$$

и найдем значения T в точках сферы радиуса ρ. Предварительно получим вспомогательные соотношения. Для этого примем во внимание интегральную формулу Молоденского

$$\frac{dU_0}{d\rho} = \frac{1}{2\pi\rho}\int\frac{U - U_0}{r^3}\,d\sigma + \frac{U_0}{\rho},$$

определяющую значение нормальной производной для гармонической функции U, заданной на поверхности сферы [2]. Применяя эту формулу к гармоническим функциям

$$\rho\frac{dT}{d\rho},\ \rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dT}{d\rho}\right), \ldots,$$

где

$$\frac{dT}{d\rho} = -\Delta g - \frac{2T}{\rho}, \tag{5}$$

находим

$$\frac{d^i\Delta g}{d\rho^i} = \frac{1}{2\pi\rho}\int\left[\frac{d^{i-1}\Delta g}{d\rho^{i-1}} - \left(\frac{d^{i-1}\Delta g}{d\rho^{i-1}}\right)_0\right]\frac{d\sigma}{r^3} - (i+1)\frac{d^{i-1}\Delta g}{\rho\, d\rho^{i-1}}. \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

Представляя величину $\frac{d^{i-1}\Delta g}{d\rho^{i-1}}$ в виде разложения в ряд по сферическим функциям и учитывая, что

$$r^{-3} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(n+1)P_n(\psi),$$

где P_n — полиномы Лежандра n-го порядка, после соответствующих преобразований получаем

$$\frac{d^i\Delta g}{d\rho^i} = -\frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(n+i+1)\left(\frac{d^{i-1}\Delta g}{d\rho^{i-1}}\right)_n. \tag{7}$$

Эти соотношения, а также

$$s(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\psi) \tag{8}$$

позволяют без особых затруднений выполнить интегрирование, указанное в формуле (4). Так как

$$\frac{a}{4\pi}\int\frac{d\Delta g}{d\rho}s(\psi)\,d\sigma = \frac{\rho}{4\pi}\int\frac{d\Delta g}{d\rho}s(\psi)\,d\sigma - \frac{H}{4\pi}\int\frac{d\Delta g}{d\rho}s(\psi)\,d\sigma,$$

то с помощью (7) и (8) находим

$$\frac{a}{4\pi}\int \frac{d\Delta g}{d\rho} s(\psi)\, d\sigma = -\Delta g - \frac{3T}{\rho} + \frac{H}{\rho}\left(\Delta g + \frac{3T}{\rho}\right), \tag{9}$$

где T определяется формулой Стокса (3). Таким же путем находим

$$\frac{a}{4\pi}\int \frac{d^2\Delta g}{d\rho^2} s(\psi)\, d\sigma = -\frac{d\Delta g}{d\rho} + \frac{4\Delta g}{\rho} + \frac{12T}{\rho^2} + \frac{H}{\rho}\left(\frac{d\Delta g}{d\rho} - \frac{4\Delta g}{\rho} - \frac{12T}{\rho^2}\right). \tag{10}$$

Дифференцируя функцию (3) по направлению ϱ, имеем

$$\frac{d^2 T}{d\rho^2} = -\frac{d\Delta g}{d\rho} + \frac{2\Delta g}{\rho} + \frac{6T}{\rho^2}. \tag{11}$$

Теперь выполним вычисления согласно формуле (4). С помощью выражений (5) и (9) получаем

$$\frac{a}{4\pi}\int\left(\Delta g - H\frac{d\Delta g}{d\rho}\right) s(\psi)\, d\sigma + \frac{dT}{d\rho} H = T + \delta_2,$$

где

$$\delta_2 = -\frac{H^2}{\rho}\left(\Delta g + \frac{3T}{\rho}\right).$$

Данный результат отличается от точного значения T возмущающего потенциала на величину δ_2, содержащую H^2. Если в формуле (6) при $i=1$ положить $\rho=a$, что соответствует вычислению вертикального градиента аномалии силы тяжести по формуле Нумерова, то вместо формулы (9) получим

$$\frac{a}{4\pi}\int \frac{d\Delta g}{d\rho} s(\psi)\, d\sigma = -\Delta g - \frac{3T}{\rho},$$

и, следовательно, величина δ_2 не будет фигурировать в результате. Это вполне согласуется с тем положением, что два первых приближения Молоденского учитывают величины, содержащие H лишь в первой степени. Далее, принимая во внимание (10) и (11), имеем

$$\frac{a}{4\pi}\int\left(\Delta g - H\frac{d\Delta g}{d\rho} + \frac{H^2}{2}\frac{d^2\Delta g}{d\rho^2}\right) s(\psi)\, d\sigma + \frac{dT}{d\rho} H - \frac{1}{2}\frac{d^2 T}{d\rho^2} H^2 = T + \delta_3,$$

где

$$\delta_3 = \frac{H^3}{\rho}\left(\frac{1}{2}\frac{d\Delta g}{d\rho} - \frac{2\Delta g}{\rho} - \frac{6T}{\rho^2}\right).$$

Легко убедиться, что величина δ_3, содержащая H^3, не будет фигурировать в результате, если в формуле (6) при $i=2$ положить $\varrho=a$.

В заключение отметим, что процесс вычислений по формуле (4), так же как и процесс последовательных приближений Молоденского, приводит к точным значениям возмущающего потенциала на сфере радиуса ρ, если только в последней из использованных формул (6) принять $\rho=a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марыч М. И. Об определении отклонений отвеса на физической поверхности Земли. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3. Изд-во Львов. ун-та, 1965.

2. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, вып. 131. М., Геодезиздат, 1960.

Работа поступила
14 декабря 1967 г.