

В. Х. НОВАК

## О ПРОЕКТИРОВАНИИ НАКЛОННОЙ ПЛОЩАДКИ МЕТОДАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Положение проектируемой наклонной площадки в инженерной геодезии чаще всего задается красной (проектной) отметкой  $H_0$  определенной точки, величиной наибольшего уклона  $i_0$  и направлением этого уклона  $\alpha_0$  [2]. При известных  $i_0$  и  $\alpha_0$  можно найти уклон  $i$  по любому другому направлению, взятому на наклонной площадке. Если дирекционный угол этого другого направления составляет  $\alpha$ , то уклон  $i$  вдоль него будет

$$i = i_0 \cos (\alpha - \alpha_0). \quad (1)$$

При наличии нивелирной сетки квадратов, прежде чем проектировать наклонную площадку, необходимо определить уклоны  $i_x$  и  $i_y$  вдоль осей  $x$  и  $y$  по формулам

$$i_x = i_0 \cos \alpha_0; \quad i_y = i_0 \sin \alpha_0. \quad (2)$$

При стороне квадрата, равной  $l$ , превышения по сторонам квадратов будут

$$h_x = li_x; \quad h_y = li_y. \quad (3)$$

Проектирование наклонной площадки (плоскости) можно осуществить иначе, задав аналитически уравнение этой площадки. В прямоугольной системе координат любая плоскость определяется уравнением первой степени вида [4]

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4)$$

где по крайней мере одно из чисел  $A$ ,  $B$  или  $C$  не равно нулю.

Чтобы определить произвольную плоскость  $P$  (см. рисунок) уравнением в прямоугольной системе координат, зафиксируем на этой плоскости точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и обозначим через  $\vec{N} = \{A, B, C\}$  какой-нибудь не равный нулю вектор, перпендикулярный плоскости  $P$ . Если теперь взять произвольную точку пространства  $M(x, y, z)$ , то векторы  $\vec{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$  и  $\vec{N}$  будут взаимно-перпендикулярны только тогда, когда точка  $M$  лежит на плоскости  $P$ , т. е. когда

$$\vec{M_1M} \cdot \vec{N} = 0. \quad (5)$$

Это и есть уравнение плоскости  $P$  в векторной форме. В координатной форме оно будет иметь следующий вид:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \quad (6)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (7)$$

где

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1.$$

Уравнение (7) является уравнением общего вида. Уравнение (6) — уравнение плоскости, проходящей через заданную точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ . Коэффициенты  $A, B, C$  уравнения (6) являются координатами вектора  $\vec{N}$  в прямоугольной декартовой системе координат.

Вектор  $\vec{N}$  выбирался таким образом, чтобы он был не равен нулю и перпендикулярен плоскости  $P$ . Длина (величина) вектора не задавалась, поэтому коэффициенты  $A, B, C$  остались неопределенными. Чтобы можно было определять любую проектную отметку проектируемой наклонной площадки, необходимо в уравнении (6) определить коэффициенты  $A, B, C$ .

Для определения  $A, B, C$  поступим следующим образом. Зададим три точки  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ , расположенные на проектируемой наклонной площадке и не лежащие на одной прямой. Так как при задании наклонной площадки одна точка задается сначала, то две другие могут быть определены по формулам (1), (2), (3).

Для того чтобы любая точка пространства  $M(x, y, z)$  принадлежала проектируемой плоскости, необходимо, чтобы векторы  $\vec{M_1M}, \vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}$  были компланарны [1], т. е. лежали в этой плоскости. Условием компланарности векторов является равенство нулю их векторно-скалярного произведения:

$$(\vec{M_1M} \times \vec{M_1M_2}) \vec{M_1M_3} = 0. \quad (8)$$

Это уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки  $M_1, M_2, M_3$  в векторной форме. В координатной форме это уравнение запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Раскрывая этот определитель по элементам первой строки, получим

$$\begin{aligned} & [(y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1)](x - x_1) + \\ & + [(x_3 - x_1)(z_2 - z_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1)](y - y_1) + \\ & + [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)](z - z_1) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначив в уравнении (10)

$$[(y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1)] = A, \quad (11)$$

$$[(x_3 - x_1)(z_2 - z_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1)] = B, \quad (12)$$

$$[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] = C, \quad (13)$$



получаем уравнение в виде (6)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (14)$$

В данном уравнении коэффициенты  $A, B, C$  уже известны из выражений (11), (12), (13). Подставляя значения координат точек  $M_1, M_2, M_3$  в уравнения (11), (12), (13), вычисляем значения коэффициентов  $A, B, C$ , а затем, подставив эти коэффициенты и значения координат точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  в формулу (14), получим уравнение проектируемой наклонной площадки.

Уравнение проектируемой наклонной площадки можно получить из выражения (9), если подставить в него значения координат точек  $M_1, M_2, M_3$  и раскрыть определитель. В этих уравнениях  $z$  отождествляется с  $H$ , т. е. является проектной отметкой.

Рассмотрим пример для подтверждения этого метода [3, стр. 190—191]. При этом проектные отметки округлены до сотых долей метра. Необходимо спроектировать взлетно-посадочную полосу (ВПП), состоящую из четырех наклонных площадок I, II, III, IV (см. таблицу). Систему координат поместим так, как показано в таблице. Каждая из четырех площадок задана проектной отметкой определенной точки  $H_1$ , величиной наибольшего уклона  $i_0$  и направлением этого уклона  $\alpha_0$ . Запишем эти параметры для каждой площадки и, определив две дополнительные точки, запишем уравнения этих площадок.

### Площадка I

Точка

$$M_1(x_1=0; y_1=0; H_1=10,740);$$

$$i_0=-0,00693;$$

$$\alpha_0=23^\circ 50'.$$

Две другие точки определяем по формулам (2), (3). Они будут

$$M_2(x_2=0; y_2=10; z_2=10,712);$$

$$M_3(x_3=6; y_3=0; z_3=10,702).$$

Подставляя значения координат этих точек в уравнение (14) или (9), получим уравнение площадки I

$$(I) \quad z=10,740-0,00634x-0,0028y.$$

### Площадка II

Точка

$$M_1(x_1=0, y_1=0; H_1=10,740);$$

$$i_0=-0,00693;$$

$$\alpha_0=156^\circ 10'.$$

Аналогично, как и для площадки I, определяем две дополнительные точки:

$$M_2(x_2=0; y_2=10; z_2=10,712),$$

$$M_3(x_3=-6; y_3=0; z_3=10,702).$$

Уравнение площадки II будет

$$(II) \quad z=10,740+0,00634x-0,0028y.$$

↑ x

План взлетно-посадочной полосы

|     | 0     | 10    | 20    | 30    | 40    | 50    | 60    | 70    | 80    | 90    | 100   | 110   | 120   | 130   | 140 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 36  | 10,47 | 10,44 | 10,42 | 10,39 | 10,36 | 10,33 | 10,30 | 10,28 | 10,25 | 10,22 | 10,19 | 10,16 | 10,14 | 10,11 |     |
| 30  | 10,52 | 10,49 | 10,46 | 10,44 | 10,41 | 10,38 | 10,35 | 10,32 | 10,30 | 10,27 | 10,24 | 10,21 | 10,18 | 10,16 |     |
| 24  | 10,57 | 10,54 | 10,51 | 10,48 | 10,46 | 10,43 | 10,40 | 10,37 | 10,34 | 10,32 | 10,29 | 10,26 | 10,23 | 10,20 |     |
| 18  | 10,62 | 10,59 | 10,56 | 10,53 | 10,50 | 10,48 | 10,45 | 10,42 | 10,39 | 10,36 | 10,34 | 10,31 | 10,28 | 10,25 |     |
| 12  | 10,66 | 10,64 | 10,61 | 10,58 | 10,55 | 10,52 | 10,50 | 10,47 | 10,44 | 10,41 | 10,38 | 10,36 | 10,33 | 10,30 |     |
| 6   | 10,70 | 10,67 | 10,65 | 10,62 | 10,59 | 10,56 | 10,53 | 10,51 | 10,48 | 10,45 | 10,42 | 10,39 | 10,37 | 10,34 |     |
| 0   | 10,74 | 10,71 | 10,68 | 10,66 | 10,63 | 10,60 | 10,57 | 10,54 | 10,52 | 10,49 | 10,46 | 10,43 | 10,40 | 10,38 |     |
| -6  | 10,70 | 10,67 | 10,65 | 10,62 | 10,59 | 10,56 | 10,53 | 10,51 | 10,48 | 10,45 | 10,42 | 10,39 | 10,37 | 10,34 |     |
| -12 | 10,66 | 10,64 | 10,61 | 10,58 | 10,55 | 10,52 | 10,50 | 10,47 | 10,44 | 10,41 | 10,38 | 10,36 | 10,33 | 10,30 |     |
| -18 | 10,62 | 10,59 | 10,56 | 10,53 | 10,50 | 10,48 | 10,45 | 10,42 | 10,39 | 10,36 | 10,34 | 10,31 | 10,28 | 10,25 |     |
| -24 | 10,57 | 10,54 | 10,51 | 10,48 | 10,46 | 10,43 | 10,40 | 10,37 | 10,34 | 10,32 | 10,29 | 10,26 | 10,23 | 10,20 |     |
| -30 | 10,52 | 10,49 | 10,46 | 10,44 | 10,41 | 10,38 | 10,35 | 10,32 | 10,30 | 10,27 | 10,24 | 10,21 | 10,18 | 10,16 |     |
| -36 | 10,47 | 10,44 | 10,42 | 10,39 | 10,36 | 10,33 | 10,30 | 10,28 | 10,25 | 10,22 | 10,19 | 10,16 | 10,14 | 10,11 |     |
|     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |     |

↑ y



### Площадка III

Точка

$$\begin{aligned}M_1(x_1=12; y_1=0; H_1=10,664); \\ i_0=-0,00848; \\ \alpha_0=19^\circ 20' .\end{aligned}$$

Дополнительные точки

$$\begin{aligned}M_2(x_2=18; y_2=0; z_2=10,616); \\ M_3(x_3=12; y_3=10; z_3=10,636) .\end{aligned}$$

Уравнение площадки III

$$(III) \quad z=10,760-0,008x-0,0028y .$$

### Площадка IV

Точка

$$\begin{aligned}M_1(x_1=-12; y_1=0; H_1=10,664); \\ i_0=-0,00848; \\ \alpha_0=160^\circ 40' .\end{aligned}$$

Дополнительные точки

$$\begin{aligned}M_2(x_2=-18; y_2=0; z_2=10,616); \\ M_3(x_3=-12; y_3=10; z_3=10,636) .\end{aligned}$$

Уравнение площадки IV

$$(IV) \quad z=10,760+0,008x-0,0028y .$$

Подставляя значения координат  $x$  и  $y$ , получим значения проектных отметок  $H=z$ .

### ВЫВОДЫ

Описанный метод определения проектных отметок наклонных площадок целесообразно применять при произвольном расположении пикетных точек  $x, y$  на местности. Уравнение наклонной площадки является линейным, и задачу определения проектных отметок нетрудно запрограммировать для проведения вычислений с помощью ЭЦВМ.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М., «Высшая школа», 1966.
2. Видуев Н. Г., Ракитов Д. И., Подрезан В. В. Геодезические работы на строительной площадке. М., Геодезиздат, 1959.
3. Левчук Г. П. Инженерная геодезия, ч. II—III. М., Геодезиздат, 1958.
4. Моденов П. С. Аналитическая геометрия. М., Изд-во Москов. ун-та, 1955.

Работа поступила  
1 апреля 1968 г.