УДК 528.234

О. М. ОСТАЧ

О ВЫБОРЕ НОРМАЛЬНОГО ЭЛЛИПСОИДА *

Нормальное гравитационное поле задается обычно полем силы тяжести уровенного эллипсоида вращения. Потенциал и сила тяжести как во внешнем пространстве, так и на поверхности уровенного эллипсоида будут однозначно определены, если заданы размеры, масса и угловая скорость вращения такого эллипсоида. Эти параметры нормального эллипсоида практически нетрудно подобрать такими, чтобы потенциал силы тяжести U_0 на его поверхности был достаточно близок ** к потенциалу Земли на уровне моря W_0.

Итак, при фиксированных параметрах нормального эллипсоида соответствующую ему нормальную формулу можно считать известной. Имеем

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B),$$

где γ_e — нормальная сила тяжести на экваторе;
B — геодезическая широта;
γ_p — нормальная сила тяжести на полюсе;
$\alpha = \dfrac{a-b}{a}$ — сжатие;

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}; \quad \beta_1 = \frac{1}{4}\alpha\beta + \frac{1}{8}\alpha^2,$$

причем все эти величины известны.

При таком выборе нормального эллипсоида краевое условие для возмущающего потенциала T, определяемого как разность действительного и нормального потенциалов в какой-либо внешней по отношению к Земле точке, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \cdot \frac{T}{\gamma} = -(g - \gamma) - \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \cdot \frac{(W_0 - U_0)}{\gamma}. \tag{1}$$

Если измерения силы тяжести g выполнены, то аномалии $(g-\gamma)$ могут считаться известными, так как величина γ легко вычисляется. Второй член правой части выражения (1) заранее неизвестен и не может быть определен чисто гравиметрическим методом. Этот член наряду с аномалиями силы тяжести войдет во все формулы, решающие краевую задачу, и вычисление по ним, вообще говоря, возможно только в том

* Предложение, вносимое в настоящей заметке, для аналогичного случая рассматривалось Н. К. Мигалем ранее. См. «Науч. зап. Львов. политехн. ин-та», вып. XV, сер. геодез., № 1, 1949, стр. 3—12 (прим. редакции).

** Близок настолько, чтобы отношение $\dfrac{U_0 - W_0}{W_0}$ было, например, порядка $(2-3) \times 10^{-5}$.

случае, если этот член каким-либо путем будет найден. Для его определения необходимо привлечение астрономо-геодезических данных (линейных измерений).

В рассматриваемом случае задания нормального эллипсоида выражение для высоты квазигеоида имеет вид

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma}. \tag{2}$$

Если высота квазигеоида определена, то ее сумма с нормальной высотой дает расстояние от точки физической поверхности Земли до поверхности эллипсоида с известными размерами. Задача градусных измерений в этом случае состоит в определении положения этого эллипсоида относительно геодезического, а также параметра $(W_0 - U_0)$.

Очевидно, что упомянутый член можно было бы сделать равным нулю, если бы была заранее известна постоянная W_0. Тогда можно было бы изменить на известную величину либо массу, либо полуось нормального эллипсоида с целью получить потенциал на его поверхности, равный W_0. Но постоянная W_0 с необходимой точностью неизвестна, и краевое условие в общем случае будет содержать обсуждаемый член, если размеры и масса нормального эллипсоида заранее фиксированы. Это обусловлено принципиальной невозможностью определить размеры Земли только по гравиметрическим данным.

Однако имеется возможность более рационально распределить члены, зависящие от линейных измерений и не зависящие от них. Рассмотрим, как эта возможность может быть реализована практически.

Известно, что распределение силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида заданного сжатия слабо зависит от изменений большой полуоси этого эллипсоида, если при этом фиксировать значение силы тяжести на экваторе. В приводимой табличке показаны ее изменения (в *мгал*), соответствующие изменению полуоси на величину Δa, при условии, что γ_e и α остаются неизменными.

Изменения a

$B°$ \ Δa	30 *м*	60 *м*	90 *м*
0	0	0	0
30	0,01	0,02	0,03
60	0,03	0,06	0,09
90	0,04	0,08	0,12

Если при принятой точности решения задачи можно пренебречь такими изменениями нормальной силы тяжести (а следовательно, и аномалий силы тяжести), то можно считать, что полуось нормального эллипсоида такова, что потенциал на его поверхности равен потенциалу Земли на уровне моря. Полуось такого эллипсоида остается неизвестной (содержит неопределенность порядка $\frac{W_0 - U_0}{\gamma}$), но краевое условие (1), а также выражение для высоты квазигеоида (2) в этом случае не содержат неизвестного члена, определение которого связано с линейными измерениями. Таким образом, правая часть краевого условия становится полностью известной и возмущающий потенциал может быть найден.

Задачей градусных измерений в этом случае является определение большой полуоси нормального эллипсоида. Как только она будет известна, легко может быть получен параметр W_0.

В настоящее время предпочтение отдается первому способу задания нормального эллипсоида. Это связано, вероятно, с тем, что в последнем случае остается неясным, можно ли, сохраняя условие $U_0 = W_0$, избежать ошибок, возникающих из-за неучета изменений аномалий силы тяжести при переходе от нормального эллипсоида ($U_0 \neq W_0$) к нормальному эллипсоиду ($U_0 = W_0$). Далее в результате простых рассуждений будет показано, что это возможно.

Обратим внимание на то, что нормальные формулы силы тяжести для двух уровенных эллипсоидов с полуосями a и $(a+\Delta a)$ с очень высокой точностью совпадают, если сила тяжести на экваторе у них одна и та же, а сжатие первого отличается от сжатия второго на величину

$$\Delta\alpha = \frac{5}{2} q \frac{\Delta a}{a},$$

где $q = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e}$,

ω — угловая скорость вращения.

Действительно, в этом случае, как следует из теоремы Клеро,

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} q - \frac{17}{14} q\alpha,$$

нормальные формулы, соответствующие этим эллипсоидам, будут содержать один и тот же коэффициент β, а по условию и одно и то же значение γ_e. Таким образом, они различаются только коэффициентами β_1, что приводит к различию значений γ_0 для того и другого эллипсоида, никогда не превосходящему 0,001 *мгал.* Следует заметить, что величина $\Delta\alpha$ крайне мала. При $\Delta a = 100$ *м* она составляет $1{,}5 \cdot 10^{-7}$, чему соответствует изменение знаменателя сжатия на 0,014 единицы.

Теперь становится ясным, что всегда можно полагать, что потенциал на поверхности нормального эллипсоида равен потенциалу Земли на уровне моря. Краевое условие для возмущающего потенциала имеет в этом случае вид

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} \cdot \frac{T}{\gamma} = -(g-\gamma). \tag{3}$$

Используя краевое условие в форме (3), нужно помнить, что размеры выбранного нормального эллипсоида точно неизвестны, но нормальный потенциал на его поверхности равен потенциалу Земли на уровне моря. Высота квазигеоида теперь определяется по формуле

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}. \tag{4}$$

Таким образом, мы имеем возможность определять расстояния от точек физической поверхности Земли до выбранного нормального эллипсоида с неизвестными размерами. Этих величин достаточно, чтобы с помощью уравнений градусных измерений определить полуось этого эллипсоида и его ориентировку, используя необходимые астрономо-геодезические данные. Так как в этом случае поправки к полуоси и сжатию связаны между собой известной зависимостью, то в уравнениях градусных измерений будет фигурировать только одна из них, а именно — поправка к полуоси. Здесь мы предполагаем, что сжатие отсчетного геодезического (референц) эллипсоида соответствует выбранной нормальной формуле. Понятно, что необходимые пересчеты астрономо-геодезических высот квазигеоида, связанные с этим предположением, легко выполнимы.

Работа поступила
11 мая 1968 г.