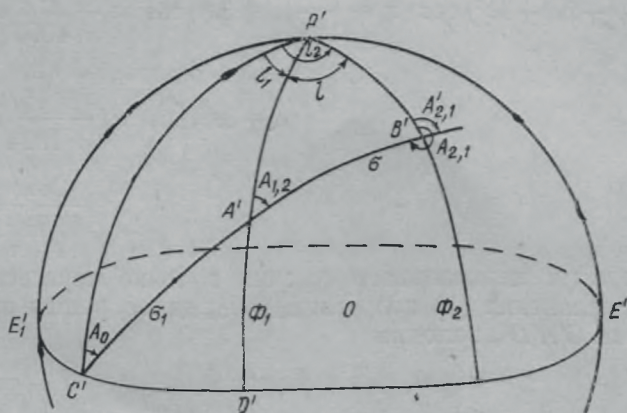


М. И. РУСИН

Вопросы решения геодезических задач на большие расстояния по центральному сечению рассматриваются рядом авторов: в работе [2] определяется длина дуги центрального сечения между заданными точками эллипсоида, независимо путь ее нахождения указывается в работе [1], формулы определения длины и азимутов приводятся в работе [3]. Цель настоящей статьи — привести решение указанных задач к удобному для практического применения виду.



Пусть на эллипсоиде s — дуга центрального сечения между точками A и B , α и Φ — соответственно азимут и геоцентрическая широта в текущей ее точке, l — разность долгот конечных точек дуги. При геоцентрическом изображении точек эллипсоида на шаре (см. рисунок) их сферические широты и долготы соответственно равны геоцентрическим широтам и долготам, а формулы [3]

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} A} = \frac{\cos \Phi}{\cos B} W^2; \quad (1)$$

$$s = \frac{a}{\alpha_1} [\sigma'' + \beta \sin \sigma \cos (2\sigma_1 + \sigma) - \gamma \sin 2\sigma \cos 2(2\sigma_1 + \sigma) - \delta \sin 3\sigma \cos 3(2\sigma_1 + \sigma) - \varepsilon \sin 4\sigma \cos 4(2\sigma_1 + \sigma)] \quad (2)$$

устанавливают связь между α и A , s и σ . Здесь σ — сферическое изображение центрального сечения, A — его азимут в текущей точке. Формула (2) в несколько ином виде, с удержанием малых величин порядка e^4 приводится в работе [2], e^6 — в работе [3].

Решая (2) относительно σ , имеем

$$\sigma'' = \frac{s}{a} \alpha_1 - \beta \sin \sigma \cos (2\sigma_1 + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos 2(2\sigma_1 + \sigma) + \\ + \delta \sin 3\sigma \cos 3(2\sigma_1 + \sigma) + \varepsilon \sin 4\sigma \cos 4(2\sigma_1 + \sigma). \quad (3)$$

Входящие в формулы (2) и (3) α_1 , β , γ , δ , ε выражаются так:

$$\alpha_1 = \rho'' \left[1 + \frac{1}{4} (e^2 + e^4 + e^6 + e^8) \cos^2 \alpha_0 - \frac{9}{64} (e^4 + 2e^6 + 3e^8) \cos^4 \alpha_0 + \right. \\ \left. + \frac{23}{256} (e^6 + 3e^8) \cos^6 \alpha_0 - \frac{1021}{16384} e^8 \cos^8 \alpha_0 \right];$$

$$\beta = \rho'' \left[\frac{1}{4} (e^2 + e^4 + e^6 + e^8) \cos^2 \alpha_0 - \frac{1}{8} (e^4 + 2e^6 + 3e^8) \cos^4 \alpha_0 + \right. \\ \left. + \frac{53}{512} (e^6 + 3e^8) \cos^6 \alpha_0 - \frac{95}{1024} e^8 \cos^8 \alpha_0 \right];$$

$$\gamma = \rho'' \left[\frac{1}{128} (e^4 + 2e^6 + 3e^8) \cos^4 \alpha_0 - \frac{1}{128} (e^6 + 3e^8) \cos^6 \alpha_0 - \frac{5}{4096} e^8 \cos^8 \alpha_0 \right]; \quad (4)$$

$$\delta = \rho'' \left[\frac{5}{512} (e^6 + 3e^8) \cos^6 \alpha_0 - \frac{15}{1024} e^8 \cos^8 \alpha_0 \right];$$

$$\varepsilon = \rho'' \left[\frac{261}{65536} e^8 \cos^8 \alpha_0 \right].$$

Здесь α_0 — азимут центрального сечения в точке пересечения его с экватором. Из уравнения (1) получим $\alpha_0 = A_0$; далее, решая прямоугольный треугольник $C'A'D'$, находим

$$\sin A_0 = \sin A_{12} \cos \Phi_1, \quad (5)$$

а также

$$\operatorname{tg} \sigma_1 = \sec A_{12} \operatorname{tg} \Phi_1. \quad (6)$$

Последний член формулы (2) не превышает 0,06 мм, поэтому при точности вычисления s в 0,1 мм указанным членом можно пренебречь. Тогда

$$\sigma'' = \sigma_0'' + \text{I} + \text{II} + \text{III}; \quad (7)$$

$$s = \frac{a}{\alpha_1} (\sigma'' - \text{I} - \text{II} - \text{III}), \quad (8)$$

где

$$\sigma_0'' = \frac{s}{a} \alpha_1; \quad (9)$$

$$\text{I} = -\beta \sin \sigma \cos (2\sigma_1 + \sigma);$$

$$\text{II} = \gamma \sin 2\sigma \cos 2(2\sigma_1 + \sigma); \quad (10)$$

$$\text{III} = \delta \sin 3\sigma \cos 3(2\sigma_1 + \sigma).$$

После разложения поправочных членов формулы (7) в ряд получим, аналогично [5],

$$\sigma'' = \sigma_0'' + I_0 + II_0 + III_0 + I_0 \frac{dI}{d\sigma} + I_0 \left(\frac{dI}{d\sigma} \right)^2 + I_0 \frac{dII}{d\sigma} + II_0 \frac{dI}{d\sigma} + \frac{1}{2} I_0^2 \frac{d^2 I}{d\sigma^2}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\sigma} &= \frac{\beta}{\rho''} \cos 2(\sigma_1 + \sigma); \\ \frac{dII}{d\sigma} &= 2 \frac{\gamma}{\rho''} \cos 4(\sigma_1 + \sigma); \\ \frac{d^2 I}{d\sigma^2} &= -2 \frac{\beta}{\rho''} \sin 2(\sigma_1 + \sigma). \end{aligned} \quad (12)$$

Вычисление по формуле (11), в отличие от формулы (7), не требует применения последовательных приближений, так как все функции σ вычисляются здесь при значении $\sigma = \sigma_0$. Выведенные формулы дают возможность вычислять s с точностью 0,1 мм при удержании в коэффициентах α_1 , β и γ членов с e^8 . Однако в большинстве случаев на практике целесообразно ограничиться точностью в 0,1 м при вычислении расстояний и 0'',001 — при вычислении координат и азимутов. Тогда в формулах для s и σ достаточно удерживать члены с e^6 , причем δ можно считать равным нулю. Следовательно,

$$s = \frac{a}{\alpha_1} [\sigma'' - I - II]; \quad (13)$$

$$\sigma'' = \sigma_0'' + I + II, \quad (14)$$

или

$$\sigma'' = \sigma_0'' + I_0 + II_0 + I_0 \frac{dI}{d\sigma}. \quad (15)$$

Связь между A и α дается формулой (1), из которой можно получить приближенную формулу, обеспечивающую точность 0'',001:

$$(\alpha - A)'' = \alpha' \sin 2A, \quad (16)$$

где

$$\alpha' = -\frac{\rho''}{4} [e^4 \cos^2 \Phi - (e^4 - 2e^6) \cos^4 \Phi - 2e^6 \cos^6 \Phi]. \quad (17)$$

Таблица коэффициентов α_1 , β , γ , α'

$\cos^2 \alpha_0$	α_1	Изменение на 0,1	β	Изменение на 0,1	γ	Изменение на 0,1	$\frac{\rho''}{\cos^2 \sigma}$	α'	Изменение на 0,1
0,0	+206 264'' 806	+34'' 748	+	0'' 000	+34'' 748	+0'' 000	+0'' 000	0,0	-0'' 000
0,1	299,541	,722	34,736	,725	1	2	0,1	0,208	-0,185
0,2	334,249	,695	69,449	,701	3	3	0,2	0,371	-0,140
0,3	368,932	,669	104,139	,678	7	4	0,3	0,487	-0,093
0,4	403,588	,643	138,805	,655	12	6	0,4	0,557	-0,047
0,5	438,218	,617	173,448	,631	18	7	0,5	0,581	0,000
0,6	472,821	,590	208,068	,608	26	9	0,6	0,559	+0,046
0,7	507,399	,564	242,665	,585	36	10	0,7	0,490	+0,093
0,8	541,950	,538	277,238	,562	47	12	0,8	0,374	+0,140
0,9	576,475	,512	311,788	,538	59	13	0,9	0,210	+0,187
1,0	+206 610,975	+34,486	+346,316	+34,515	+0'' 073	+0'' 014	1,0	-0'' 000	+0'' 234

Выше приводится таблица коэффициентов α_1 , β , γ по аргументу $\cos^2 \alpha_0$ и α' по аргументу $\cos^2 \Phi$. Коэффициент γ из приведенной таблицы находим по интерполяционной формуле

$$y = y_0 + (x - x_0) \left(\frac{dy}{dx} \right)_0, \quad (18)$$

а остальные — по формуле

$$y = y_0 + (x - x_0) \left\{ \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 + \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 \right] \frac{x - x_0}{2} \right\}. \quad (19)$$

Найдем, например, коэффициент α_1 при значении аргумента $\cos^2 \alpha_0 = 0,395410$. Получим

$$\alpha_1 = 206\,368'',932 + 0,95410 \{34'',669 + [34'',643 - 34'',669] 0,477\} = 206\,401'',998.$$

Изложим последовательность решения обратной и прямой геодезических задач.

Обратная геодезическая задача. По формуле

$$\operatorname{tg} \Phi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B, \quad (20)$$

или с помощью ряда

$$(B - \Phi)'' = 692'',6267 \sin 2B - 1'',1629 \sin 4B + 0'',0026 \sin 6B \quad (21)$$

переходим от геодезических широт к геоцентрическим, после чего в сферическом треугольнике $A'P'B'$ известны три элемента. Решая его, находим

$$\cos \sigma = \sin \Phi_1 \sin \Phi_2 + \cos \Phi_1 \cos \Phi_2 \cos l; \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A'_{2,1} + A_{1,2}) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (\Phi_2 + \Phi_1)}{\sin \frac{1}{2} (\Phi_2 - \Phi_1)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} l \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A'_{2,1} - A_{1,2}) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (\Phi_2 + \Phi_1)}{\cos \frac{1}{2} (\Phi_2 - \Phi_1)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} l \end{aligned} \right\}. \quad (23)$$

Здесь $l = L_2 - L_1$, а индексы 1, 2 указывают на точки A и B соответственно. Далее по формуле (5) определяем α_0 , затем $\cos^2 \alpha_0$ — аргумент, с которым вычисляем при помощи таблицы коэффициенты α_1 , β и γ . По формуле (6) получаем σ_1 , после чего вычисляем длину дуги центрального сечения по формуле (13). Переход от $A_{1,2}$ и $A_{2,1}$ к азимутам центрального сечения $\alpha_{1,2}$ и $\alpha_{2,1}$ осуществляем по формуле (16), предварительно вычислив с помощью таблицы коэффициент α' . Контролем решения задачи на шаре является выполнение равенства

$$\sin \sigma = \frac{\cos \Phi_1 \sin l}{\sin A'_{2,1}} = \frac{\cos \Phi_2 \sin l}{\sin A_{1,2}}. \quad (24)$$

Прямая геодезическая задача. По тем же формулам, что и в обратной задаче, переходим от B_1 , $\alpha_{1,2}$ к Φ_1 , $A_{1,2}$ и вычисляем α_0 , σ_1 . При этом, с сохранением принятой точности, в формуле (16) считаем $A_{1,2} = \alpha_{1,2}$. По формуле (15) вычисляем сферическую дугу σ . Коэффициенты α_1 , β , γ и α' , как и в обратной задаче, находим при по-

мощи таблицы. Затем из решения сферических треугольников, показанных на приводимом рисунке, получаем

$$\operatorname{tg} A'_{2,1} = \operatorname{tg} A_0 \sec (\sigma_1 + \sigma); \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} \Phi_2 = \cos A_{2,1} \operatorname{tg} (\sigma_1 + \sigma); \quad (26)$$

$$\operatorname{tg} l_1 = \operatorname{tg} \sigma_1 \sin A_0; \quad (27)$$

$$\operatorname{tg} l_2 = \operatorname{tg} (\sigma_1 + \sigma) \sin A_0; \quad (28)$$

$$l = l_2 - l_1. \quad (29)$$

Контролем вычислений служит равенство (24).

Далее вычисляем долготу точки B , $L_2 = L_1 + l$ и по формулам (16) и (20) переходим от $A_{2,1}$, Φ_2 к $\alpha_{2,1}$, B_2 . Приведем примеры.

Обратная геодезическая задача

B_1	+14°15'25".318	$\frac{1}{2} (A'_{2,1} + A_{1,2})$	127°17'15".069	$\sin \sigma$	0,625 072
B_2	—9 54 49,123	$\frac{1}{2} (A'_{2,1} - A_{1,2})$	0 36 11,322	$\cos (2\sigma_1 + \sigma)$	0,992 290
L_1	—17 53 44,117	$A_{1,2}$	126 41 03,747	$\sin 2\sigma$	0,976
L_2	+12 41 10,213	$A'_{2,1}$	127 53 26,391	$\cos 2 (2\sigma_1 + \sigma)$	0,969
l	+30 34 54,330	$A_{2,1}$	307 53 26,391		
$\frac{1}{2} l$	+15 17 27,165			σ''	139 275."028
$\operatorname{tg} \Phi_1$	0,2523 9753	$\sin \Phi_1$	0,2447 2289	—I	85,108
		$\sin \Phi_2$	—0,1710 4516	—II	—0,011
$\operatorname{tg} B_1$	0,2540 9832	$\cos \Phi_1$	0,9695 9306	$\frac{s}{a} \alpha_1$	139 360,125
$1 - e^2$	0,9933 0658	$\cos \Phi_2$	0,9852 6319	s	4 306 513,6 м
$\operatorname{tg} B_2$	—0,1747 7336	$\cos l$	0,8609 0405		
$\operatorname{tg} \Phi_2$	—0,1736 0353	$\cos \sigma$	0,7805 6671	$\cos^2 \Phi_1$	0,940 1
Φ_1	+14°09'55".649	σ	38°41'15".028	α'_1	—0."131
Φ_2	—9 50 54,934	$2\sigma_1$	—45 48 25,2	$\sin 2A_{1,2}$	—0,958
$\frac{1}{2} (\Phi_2 + \Phi_1)$	+2 09 30,358	$2\sigma_1 + \sigma$	352 52 49,8	$\alpha_{1,2} - A_{1,2}$	0."125
$\frac{1}{2} (\Phi_2 - \Phi_1)$	—12 00 25,292			$\alpha_{1,2}$	126°41'03."872
		$\sec A_{1,2}$	—1,6739 0	$\cos^2 \Phi_2$	0,9708
$\cos \frac{1}{2} (\Phi_2 - \Phi_1)$	0,9781 2210	$\operatorname{tg} \sigma_1$	—0,4224 89	α'_2	—0."066
$\sin \frac{1}{2} (\Phi_2 + \Phi_1)$	0,0376 6284	σ_1	—22°54'12".6	$\sin 2A_{2,1}$	—0,969
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} l$	0,2733 9795			$\alpha_{2,1} - A_{2,1}$	0."064
$\cos \frac{1}{2} (\Phi_1 + \Phi_2)$	0,9992 9050	$\cos^2 \alpha_0$	0,395 410	$\alpha_{2,1}$	307°53'26."455
$\sin \frac{1}{2} (\Phi_2 - \Phi_1)$	—0,2080 3162	α_1	206 401."998	контроль	
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A'_{2,1} + A_{1,2})$	—1,3132 8100	β	137,215	$\frac{\cos \Phi_1 \sin l}{\sin A_{2,1}}$	0,6250 7246
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A'_{2,1} - A_{1,2})$	0,0105 2726	γ	0,012	$\frac{\cos \Phi_2 \sin l}{\sin A_{1,2}}$	0,6250 7246

Прямая геодезическая задача

B_1	$+14^{\circ}15'25''318$	σ_0	$38^{\circ}42'40''125$	$A_{2,1}$	$307^{\circ}53'26''394$
L_1	$-17\ 53\ 44,117$	I_0	$-1\ 25,156$	$\alpha_{2,1}$	$307\ 53\ 26,458$
$\alpha_{1,2}$	$126\ 41\ 03,872$	II_0	$0,011$		
s	$4\ 306\ 513,6м$	$I_0\left(\frac{dI}{d\sigma}\right)_0$	$0,048$	B_2	$-9^{\circ}54'49''123$
		σ	$38^{\circ}41'15''028$	Φ_2	$-9\ 50\ 54,934$
Φ_1	$14^{\circ}09'55''649$			$\operatorname{tg}\Phi_2$	$-0,1736\ 0353$
$A_{1,2}$	$126\ 41\ 03,747$	$\sin\sigma_0$	$0,625\ 394$	$\cos A_{2,1}$	$-0,6141\ 5663$
σ_1	$-22\ 54\ 12,644$	$\cos(2\sigma_1+\sigma_0)$	$0,992\ 341$	$\operatorname{tg}(\sigma_1+\sigma)$	$0,2826\ 6980$
$\sigma_1+\sigma$	$15\ 47\ 02,384$	$2\sigma_0$	$77^{\circ}25'$	$\sin A_0$	$0,7775\ 5410$
$2\sigma_1+\sigma_0$	$-7\ 05\ 45,2$	$2(2\sigma_1+\sigma_0)$	$-14\ 12$	$\operatorname{tg}\sigma_1$	$-0,4224\ 8878$
		$2(\sigma_1+\sigma_0)$	$31\ 37$	$\operatorname{tg}l_2$	$0,2197\ 9106$
$\sin A_{1,2}$	$0,8019\ 3860$	$\sin 2\sigma_0$	$0,976$	$\operatorname{tg}l_1$	$-0,3285\ 0788$
$\cos\Phi_1$	$0,9695\ 9306$	$\cos 2(2\sigma_1+\sigma_0)$	$0,970$	l_2	$12^{\circ}23'45''598$
$\sin\alpha_0$	$0,7775\ 5410$	$\cos 2(\sigma_1+\sigma_0)$	$0,852$	l_1	$-18\ 11\ 08,734$
$\cos^2\alpha_0$	$0,395\ 410$			l	$+30\ 34\ 54,332$
α_1	$206\ 401''998$	$\operatorname{tg}A_0$	$-1,2365\ 3667$	L_2	$+12\ 41\ 10,215$
β	$137,215$	$\sec(\sigma_1+\sigma)$	$1,0391\ 8343$		контроль
γ	$0,012$	$\operatorname{tg}A_{2,1}$	$-1,2849\ 8842$	$\sin l \cos\Phi_2$	$0,5012\ 6975$
		$A_{2,1}'$	$127^{\circ}53'26''394$	$\sin\sigma \sin A_{1,2}$	$0,5012\ 6976$

Исходные данные для примеров взяты из [4], где по ним решены геодезические задачи по способу Бесселя. Расхождение в длине геодезической линии и центрального сечения получилось 0,2 м.

Анализ приведенного решения показывает, что вычисления здесь по сравнению с решениями аналогичных задач по геодезической линии упрощаются. Можно ожидать, что рассмотренный способ найдет применение на практике. Его использование будет целесообразным в тех случаях, когда геодезическая линия может или должна быть заменена центральным сечением, а также для контроля решения геодезических задач методом Бесселя, в особенности обратной, так как переход от длины центрального сечения к длине геодезической линии сравнительно прост.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганьшин В. Н. Формулы для решения геодезических задач на сфероиде по геодезическим координатам. Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 6, 1958.
2. Мигаль Н. К. Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. Науч. зап. Львов. политехн. ин-та, вып. 15, сер. геодез., № 1, 1949.
3. Морозов В. П. Методы решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида. М., 1958.
4. Рабинович Б. Н. Практикум по высшей геодезии, 2-е изд-е. Геодезиздат, 1961.
5. Буткевич А. В. Исследования по решению вычислительных задач сфероидической геодезии. М., «Недра», 1964.

Работа поступила
26 апреля 1968 г