МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 9

УДК 528.1

А. Е. ФИЛИППОВ

УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СЕТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ

В настоящей статье рассматриваются основные виды условных уравнений, возникающих в сети пространственной трилатерации. Под пространственной трилатерацией мы понимаем геодезическую сеть треугольников с измеренными длинами сторон и измеренными в каждой вершине зенитными расстояниями. Зенитные расстояния предполагаем свободными от влияния вертикальной рефракции.

Для определения положения любого пункта сети и направлений отвесных линий в системе координат, ориентированной относительно плоскости земного экватора и плоскости начального астрономического меридиана, в одном из пунктов должны быть известны пространственные координаты x, y, z или B, L, H и, кроме того, из наблюдений должны быть получены астрономические координаты φ, λ и астрономический азимут α одной из сторон. Общее число условных уравнений в сети можно подсчитать по формуле

$$R = n + 6 - 5p + e, \tag{1}$$

где n — число измеренных сторон и зенитных расстояний;
p — число пунктов;
e — число избыточных исходных данных.

При подсчете в число «измеренных» следует включать и жесткие стороны.

Рассматривая различные виды условных уравнений, будем пользоваться в основном системой обозначений, принятой в работе [1]:

s_{ij} — длины линий;
z_{ij} — зенитные расстояния;
A_i^{jk} — плоские углы пространственных треугольников;
a_i^{jk} — горизонтальные углы;
h_i^{jk} — высота плоского треугольника ijk, опущенная из вершины i на сторону jk;
$\varphi_i, \lambda_i, \alpha_{ij}$ — астрономические координаты и азимуты;
$\delta z_{ij}, \delta s_{ij}, \delta\varphi_i, \delta\lambda_i, \delta\alpha_{ij}$ — поправки измеренных величин, определяемые из уравнивания.

Порядок следования нижних индексов у величин s и верхних у величин A, a, h не имеет значения. Как и в работе [1], будем иметь в виду общий случай, когда поправки получают все элементы сети, полученные из измерений. Чтобы упростить запись, не будем делать различия в обозначениях для измеренных и вероятнейших значений величин, надеясь, что это не вызовет недоразумений.

В сети пространственной трилатерации простейшими геометрическими фигурами, имеющими избыточные измерения, являются (рис. 1): два смежных треугольника, центральная система, замкнутая фигура, на все вершины которой идут линии из некоторого полюса, и геодезический тетраэдр (в плоской триангуляции — геодезический четырехугольник).

В фигуре, состоящей из двух смежных треугольников (рис. 1, *а*), возникает одно условное уравнение, поскольку избыточным является одно из зенитных расстояний в вершинах *1* и *2*. Это уравнение можно

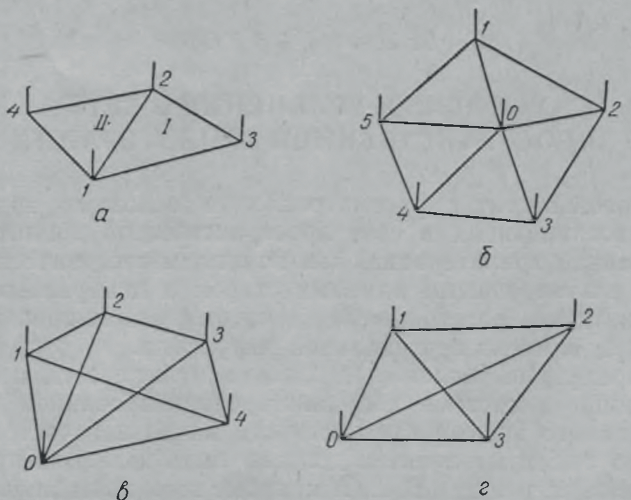

Рис. 1. Простейшие фигуры пространственной трилатерации.

получить, приняв во внимание то, что значение двугранного угла γ между взаимными вертикальными плоскостями, проходящими через смежную сторону *1—2*, вычисленное по уравненным элементам первого (*1, 2, 3*) и второго (*1, 2, 4*) треугольников, должно быть одним и тем же.

Формулы, позволяющие вычислить угол γ для стороны *1, 2* в треугольнике *1, 2, 3* по горизонтальным углам и зенитным расстояниям, можно найти, например, в работе [2]. Имея в виду, что в рассматриваемом случае измеряются не горизонтальные углы, а стороны, эти формулы лучше представить в следующем виде:

$$\gamma = \pm (K_1 - K_2), \tag{2}$$

где

$$\cos K_1 = \frac{\cos z_{1,3} - \cos z_{1,2} \cos A_1^{2,3}}{\sin z_{1,2} \sin A_1^{2,3}}, \quad \cos K_2 = \frac{\cos z_{2,3} - \cos z_{2,1} \cos A_2^{1,3}}{\sin z_{2,1} \sin A_2^{1,3}}, \tag{3}$$

$$\cos A_1^{2,3} = \frac{s_{1,2}^2 + s_{1,3}^2 - s_{2,3}^2}{2 s_{1,2} s_{1,3}}, \quad \cos A_2^{1,3} = \frac{s_{2,1}^2 + s_{2,3}^2 - s_{1,3}^2}{2 s_{2,1} s_{2,3}}. \tag{4}$$

Верхний знак в формуле (2) соответствует случаю, когда треугольник расположен справа от направления *1, 2*. Простой заменой индекса 3 на индекс 4 с учетом только что сделанного замечания получаются формулы для вычисления угла γ по элементам треугольника *1, 2, 4*.

Из условия

$$\gamma^{\mathrm{I}} - \gamma^{\mathrm{II}} = 0$$

или

$$(K_1^{\mathrm{I}} - K_2^{\mathrm{I}}) \mp (K_1^{\mathrm{II}} - K_2^{\mathrm{II}}) = 0$$

вытекает следующее уравнение, связывающее поправки измеренных сторон и зенитных расстояний в смежных треугольниках *1, 2, 3* (*I*) и *1, 2, 4* (*II*):

$$[b_1(\operatorname{ctg} C_2^{\mathrm{I}} \cos A_1^{2,3} - \operatorname{ctg} C_1^{\mathrm{I}} \cos A_2^{1,3}) \mp b_2(\operatorname{ctg} C_2^{\mathrm{II}} \cos A_1^{2,4} - \operatorname{ctg} C_1^{\mathrm{II}} \cos A_2^{1,4})] \times$$

$$\times \frac{\rho''}{s_{1,2}} \delta s_{1,2} + b_1(\operatorname{ctg} C_1^{\mathrm{I}} + \operatorname{ctg} C_2^{\mathrm{I}} \cos A_3^{1,2}) \frac{\rho''}{s_{1,2}} \delta s_{2,3} - b_1(\operatorname{ctg} C_2^{\mathrm{I}} +$$

$$+ \operatorname{ctg} C_1^{\mathrm{I}} \cos A_3^{1,2}) \frac{\rho''}{s_{1,2}} \delta s_{1,3} \mp b_2(\operatorname{ctg} C_1^{\mathrm{II}} + \operatorname{ctg} C_2^{\mathrm{II}} \cos A_4^{1,2}) \frac{\rho''}{s_{1,2}} \delta s_{2,4} \pm$$

$$\pm b_2(\operatorname{ctg} C_2^{\mathrm{II}} + \operatorname{ctg} C_1^{\mathrm{II}} \cos A_4^{1,2}) \frac{\rho''}{s_{1,2}} \delta s_{1,4} + (-b_3 \cos a_1^{2,3} \pm b_4 \cos a_1^{2,4}) \delta z_{1,2} +$$

$$+ b_3 \delta z_{1,3} \mp b_4 \delta z_{1,4} + (b_5 \cos a_2^{1,3} \mp b_6 \cos a_2^{1,4}) \delta z_{2,1} - b_5 \delta z_{2,3} \pm b_6 \delta z_{2,4} +$$

$$+ (\gamma^{\mathrm{I}} - \gamma^{\mathrm{II}}) = 0, \tag{5}$$

где

$$b_1 = \operatorname{cosec} A_1^{2,3} \operatorname{cosec} A_2^{1,3}, \quad b_4 = \operatorname{cosec} A_1^{2,4} \operatorname{cosec} C_1^{\mathrm{II}},$$

$$b_2 = \operatorname{cosec} A_1^{2,4} \operatorname{cosec} A_2^{1,4}, \quad b_5 = \operatorname{cosec} A_2^{1,3} \operatorname{cosec} C_2^{\mathrm{I}},$$

$$b_3 = \operatorname{cosec} A_1^{2,3} \operatorname{cosec} C_1^{\mathrm{I}}, \quad b_6 = \operatorname{cosec} A_2^{1,4} \operatorname{cosec} C_2^{\mathrm{II}}.$$

Углы K и C с соответствующими индексами вычисляются с помощью написанных ниже формул. Они берутся в первой или второй четвертях в зависимости от знака $\cos K$ и $\operatorname{ctg} C$:

$$\cos K_1^{\mathrm{I}} = (\cos z_{1,3} - \cos z_{1,2} \cos A_1^{2,3}) \operatorname{cosec} z_{1,2} \operatorname{cosec} A_1^{2,3},$$

$$\cos K_2^{\mathrm{I}} = (\cos z_{2,3} - \cos z_{2,1} \cos A_2^{1,3}) \operatorname{cosec} z_{2,1} \operatorname{cosec} A_2^{1,3},$$

$$\cos K_1^{\mathrm{II}} = (\cos z_{1,4} - \cos z_{1,2} \cos A_1^{2,4}) \operatorname{cosec} z_{1,2} \operatorname{cosec} A_1^{2,4},$$

$$\cos K_2^{\mathrm{II}} = (\cos z_{2,4} - \cos z_{2,1} \cos A_2^{1,4}) \operatorname{cosec} z_{2,1} \operatorname{cosec} A_2^{1,4},$$

$$\operatorname{ctg} C_1^{\mathrm{I}} = - \operatorname{ctg} z_{1,2} \sin A_1^{2,3} \operatorname{cosec} K_1^{\mathrm{I}} + \cos A_1^{2,3} \operatorname{ctg} K_1^{\mathrm{I}},$$

$$\operatorname{ctg} C_2^{\mathrm{I}} = - \operatorname{ctg} z_{2,1} \sin A_2^{1,3} \operatorname{cosec} K_2^{\mathrm{I}} + \cos A_2^{1,3} \operatorname{ctg} K_2^{\mathrm{I}},$$

$$\operatorname{ctg} C_1^{\mathrm{II}} = - \operatorname{ctg} z_{1,2} \sin A_1^{2,4} \operatorname{cosec} K_1^{\mathrm{II}} + \cos A_1^{2,4} \operatorname{ctg} K_1^{\mathrm{II}},$$

$$\operatorname{ctg} C_2^{\mathrm{II}} = - \operatorname{ctg} z_{2,1} \sin A_2^{1,4} \operatorname{cosec} K_2^{\mathrm{II}} + \cos A_2^{1,4} \operatorname{ctg} K_2^{\mathrm{II}}.$$

Для вычисления плоских углов A_i^{jk} и горизонтальных углов a_i^{jk} служат формулы

$$s_{jk}^2 = s_{ij}^2 + s_{ik}^2 - 2 s_{ij} s_{ik} \cos A_i^{jk},$$

$$\cos A_i^{jk} = \cos z_{ij} \cos z_{ik} + \sin z_{ij} \sin z_{ik} \cos a_i^{jk}. \tag{6}$$

Коэффициенты и свободный член уравнения (5) вычисляются, естественно, по измеренным значениям элементов триангуляции. Верхний знак соответствует случаю, когда оба треугольника расположены справа от направления *1—2*. При выводе выражений для коэффициентов использовались следующие известные зависимости между поправками плоских углов в треугольнике *1, 2, 3* и поправками измеренных сторон:

$$\delta A_1^{2,3} = \frac{\rho''}{h_1^{2,3}} \delta s_{2,3} - \frac{\rho''}{h_1^{2,3}} \cos A_2^{1,3} \delta s_{1,2} - \frac{\rho''}{h_1^{2,3}} \cos A_3^{1,2} \delta s_{1,3},$$

$$\delta A_2^{1,3} = \frac{\rho''}{h_2^{1,3}} \delta s_{1,3} - \frac{\rho''}{h_2^{1,3}} \cos A_3^{1,2} \delta s_{2,3} - \frac{\rho''}{h_2^{1,3}} \cos A_1^{2,3} \delta s_{1,2}, \tag{7}$$

$$\delta A_3^{1,2} = \frac{\rho''}{h_3^{1,2}} \delta s_{1,2} - \frac{\rho''}{h_3^{1,2}} \cos A_1^{2,3} \delta s_{1,3} - \frac{\rho''}{h_3^{1,2}} \cos A_2^{1,3} \delta s_{2,3},$$

где

$$h_1^{2,3} = s_{1,3} \sin A_3^{1,2} = s_{1,2} \sin A_2^{1,3},$$

$$h_2^{1,3} = s_{1,2} \sin A_1^{2,3} = s_{2,3} \sin A_3^{1,2},$$

$$h_3^{1,2} = s_{1,3} \sin A_1^{2,3} = s_{2,3} \sin A_2^{1,3}.$$

В центральной системе вида 1б имеем N избыточных измерений, где N — число всех вершин. Этим избыточным измерениям будут соответствовать условные уравнения углов γ общим числом $N—1$ (по каждой смежной стороне) и условное уравнение горизонта. Последнее выражает требование, чтобы в полюсе сумма горизонтальных углов, вычисленная по вероятнейшим значениям измеренных длин линий и зенитных расстояний, равнялась 360°. Для фигуры 1б должно быть

$$\delta a_0^{1,2} + \delta a_0^{2,3} + \delta a_0^{3,4} + \delta a_0^{4,5} + \delta a_0^{5,1} + (a_0^{1,2} + a_0^{2,3} + a_0^{3,4} + a_0^{4,5} + a_0^{5,1} - 360^\circ) = 0, \tag{8}$$

где свободный член вычисляется по измеренным элементам. Поправки δa_i^{jk} в уравнении (8) нужно выразить через поправки δs_{ij}, δz_{ij} измеренных сторон и зенитных расстояний.

Продифференцировав формулы вида (6) и заменив дифференциалы малыми конечными приращениями, получим, например, для поправки $\delta a_0^{1,2}$ горизонтального угла $a_0^{1,2}$ в треугольнике *0, 1, 2* следующее выражение:

$$\delta a_0^{1,2} = \frac{\rho'' \sin A_0^{1,2} \operatorname{cosec} a_0^{1,2}}{h_0^{1,2} \sin z_{0,1} \sin z_{0,2}} \delta s_{1,2} - \frac{\rho'' \sin A_0^{1,2} \cos A_1^{0,2} \operatorname{cosec} a_0^{1,2}}{h_0^{1,2} \sin z_{0,1} \sin z_{0,2}} \delta s_{0,1} - \frac{\rho'' \sin A_0^{1,2} \cos A_2^{0,1} \operatorname{cosec} a_0^{1,2}}{h_0^{1,2} \sin z_{0,1} \sin z_{0,2}} \delta s_{0,2} + (\operatorname{ctg} z_{0,1} \operatorname{ctg} a_0^{1,2} - \operatorname{ctg} z_{0,2} \operatorname{cosec} a_0^{1,2}) \delta z_{0,1} + (\operatorname{ctg} z_{0,2} \operatorname{ctg} a_0^{1,2} - \operatorname{ctg} z_{0,1} \operatorname{cosec} a_0^{1,2}) \delta z_{0,2}. \tag{9}$$

Аналогичный вид имеют выражения для поправок остальных горизонтальных углов в точке 0. В результате условное уравнение горизонта в центральной системе с вершинами *0, 1, 2, 3, . . . , n* и полюсом в точке 0 можно будет записать в общем виде

$$\sum_{i=1}^{n} S_{0,i} \delta s_{0,i} + \sum_{i=1}^{n} S_{i,i+1} \delta s_{i,i+1} + \sum_{i=1}^{n} T_{0,i} \delta z_{0,i} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_0^{i,i+1} - 360^\circ \right) = 0, \tag{10}$$

где коэффициенты $S_{0,i}$, $S_{i,i+1}$, $T_{0,i}$ при поправках вычисляются по следующим формулам:

$$S_{0,i} = -\rho'' \left(\frac{\sin A_0^{i-1,i} \cos A_i^{0,i-1} \operatorname{cosec} a_0^{i-1,i}}{h_0^{i-1,i} \sin z_{0,i-1} \sin z_{0,i}} + \frac{\sin A_0^{i,i+1} \cos A_i^{0,i+1} \operatorname{cosec} a_0^{i,i+1}}{h_0^{i,i+1} \sin z_{0,i} \sin z_{0,i+1}} \right),$$

$$S_{i,\,i+1} = \frac{\rho'' \sin A_0^{i,\,i+1} \operatorname{cosec} a_0^{i,\,i+1}}{h_0^{i,\,i+1} \sin z_{0,\,i} \sin z_{0,\,i+1}}, \tag{11}$$

$$T_{0,\,i} = -\operatorname{ctg} z_{0,\,i-1} \operatorname{cosec} a_0^{i-1,\,i} - \operatorname{ctg} z_{0,\,i+1} \operatorname{cosec} a_0^{i,\,i+1} +$$
$$+ \operatorname{ctg} z_{0,\,i} (\operatorname{ctg} a_0^{i-1,\,i} + \operatorname{ctg} a_0^{i,\,i+1}).$$

В центральной системе с полюсом 0 вне полигона *1, 2, 3, 4* (рис. 1, *в*) число избыточных измерений, как и в предыдущем случае, равно числу всех вершин. В рассматриваемом примере следует составить пять условных уравнений. По каждой смежной стороне двух треугольников составляется уравнение угла γ. Для сторон *0—1* и *0—4* смежными являются соответственно треугольники *012, 014* и треугольники *043, 041*. Условие горизонта заменяется условием

$$a_0^{1,2} + a_0^{2,3} + a_0^{3,4} = a_0^{4,1},$$

откуда имеем условное уравнение

$$\delta a_0^{1,2} + \delta a_0^{2,3} + \delta a_0^{3,4} - \delta a_0^{4,1} + (a_0^{1,2} + a_0^{2,3} + a_0^{3,4} - a_0^{4,1}) = 0, \tag{12}$$

где свободный член вычисляется по измеренным элементам. В развернутом виде уравнение (12) можно формально получить из условного уравнения горизонта (10), заменив (при $n=4$) в свободном члене и в выражениях для коэффициентов угол $a_0^{4,1}$ на $360° - a_0^{4,1}$.

Геодезический тетраэдр (рис. 1, *г*) можно рассматривать как частный случай центральной системы с полюсом вне полигона (рис. 1, *в*). Необходимо составить три уравнения угла γ по сторонам *0—1, 0—2, 0—3* и условие суммы углов

$$\delta a_0^{1,2} + \delta a_0^{2,3} - \delta a_0^{3,1} + (a_0^{1,2} + a_0^{2,3} - a_0^{3,1}) = 0.$$

В развернутом виде последнее запишется так:

$$-\rho'' \left(- \frac{\sin A_0^{3,1} \cos A_1^{0,3} \operatorname{cosec} a_0^{3,1}}{h_0^{3,1} \sin z_{0,3} \sin z_{0,1}} + \frac{\sin A_0^{1,2} \cos A_1^{0,2} \operatorname{cosec} a_0^{1,2}}{h_0^{1,2} \sin z_{0,1} \sin z_{0,2}} \right) \delta s_{0,1} -$$
$$-\rho'' \left(\frac{\sin A_0^{1,2} \cos A_2^{0,1} \operatorname{cosec} a_0^{1,2}}{h_0^{1,2} \sin z_{0,1} \sin z_{0,2}} + \frac{\sin A_0^{2,3} \cos A_2^{0,3} \operatorname{cosec} a_0^{2,3}}{h_0^{2,3} \sin z_{0,2} \sin z_{0,3}} \right) \delta s_{0,2} -$$
$$-\rho'' \left(\frac{\sin A_0^{2,3} \cos A_3^{0,2} \operatorname{cosec} a_0^{2,3}}{h_0^{2,3} \sin z_{0,2} \sin z_{0,3}} - \frac{\sin A_0^{3,1} \cos A_3^{0,1} \operatorname{cosec} a_0^{3,1}}{h_0^{3,1} \sin z_{0,3} \sin z_{0,1}} \right) \delta s_{0,3} +$$
$$+\rho'' \frac{\sin A_0^{1,2} \operatorname{cosec} a_0^{1,2}}{h_0^{1,2} \sin z_{0,1} \sin z_{0,2}} \delta s_{1,2} + \rho'' \frac{\sin A_0^{2,3} \operatorname{cosec} a_0^{2,3}}{h_0^{2,3} \sin z_{0,2} \sin z_{0,3}} \delta s_{2,3} - \tag{13}$$
$$-\rho'' \frac{\sin A_0^{3,1} \operatorname{cosec} a_0^{3,1}}{h_0^{3,1} \sin z_{0,3} \sin z_{0,1}} \delta s_{3,1} + [\operatorname{ctg} z_{0,3} \operatorname{cosec} a_0^{3,1} - \operatorname{ctg} z_{0,2} \operatorname{cosec} a_0^{1,2} +$$
$$+ \operatorname{ctg} z_{0,1} (-\operatorname{ctg} a_0^{3,1} + \operatorname{ctg} a_0^{1,2})]\, \delta z_{0,1} + [-\operatorname{ctg} z_{0,1} \operatorname{cosec} a_0^{1,2} -$$
$$-\operatorname{ctg} z_{0,3} \operatorname{cosec} a_0^{2,3} + \operatorname{ctg} z_{0,2} (\operatorname{ctg} a_0^{1,2} + \operatorname{ctg} a_0^{2,3})]\, \delta z_{0,2} +$$
$$+ [-\operatorname{ctg} z_{0,2} \operatorname{cosec} a_0^{2,3} + \operatorname{ctg} z_{0,1} \operatorname{cosec} a_0^{3,1} + \operatorname{ctg} z_{0,3} (\operatorname{ctg} a_0^{2,3} - \operatorname{ctg} a_0^{3,1})]\delta z_{0,3} +$$
$$+ (a_0^{1,2} + a_0^{3,3} - a_0^{3,1}) = 0.$$

Мы воспользовались формулами (10) и (11), заменив в них (при $n=3$) угол $a_0^{3,1}$ на $360° - a_0^{3,1}$.

В несвободной сети пространственной трилатерации, кроме рассмотренных выше уравнений, могут возникнуть условные уравнения астрономических широт, долгот и азимутов, координатные уравнения и уравнения жесткости направлений выходных сторон. Составляются они по аналогии с соответствующими уравнениями в угловой пространственной триангуляции [1]. Основное различие заключается в том, что поправки δa_i^{jk} горизонтальных углов выражаются через поправки измеренных длин сторон и зенитных расстояний. Кроме того, иной вид принимают некоторые из дифференциальных формул астрономических широт, долгот и азимутов.

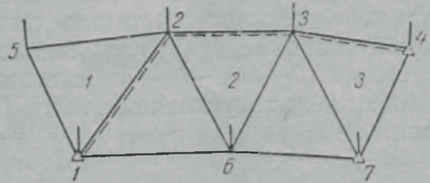

Рис. 2. Пример несвободной сети.

Для иллюстрации рассмотрим ряд треугольников трилатерации (рис. 2), опирающийся на три пункта *1, 4, 7* с твердыми значениями пространственных прямоугольных координат x_i, y_i, z_i. В пунктах *1* и *4* выполнены астрономические определения широт, долгот и азимутов направлений *1—5* и *4—7*. Поскольку сторона *4—7* жесткая, измерение ее длины не производилось.

Мы имеем в данной системе восемь избыточных исходных данных (астрономические координаты и азимут в пункте *4*, пространственные координаты этого пункта и два параметра, определяющие направление стороны *4—7* относительно основных координатных плоскостей), в связи с чем следует составить восемь условных уравнений.

Для вычисления свободных членов условных уравнений широты, долготы и азимута, возникающих между пунктами *1* и *4*, нужно выбрать ходовую линию и наметить треугольники, элементы которых будут использоваться для передачи астрономических координат по сторонам этой линии и для перехода от прямого астрономического азимута к обратному. На рисунке ходовая линия отмечена штрихами, а указанные треугольники занумерованы.

Формулы для передачи астрономических координат и азимутов приведены в работе [2]. Фигурирующий в них угол γ следует в данном случае вычислять с помощью выражений (2), (3), (4). Коэффициенты дифференциальных формул, выражающих изменения астрономических координат и азимута в конечной точке стороны *1—2* какого-то треугольника *1, 2, 3* в зависимости от поправок измеренных зенитных расстояний и длин сторон в этом треугольнике, можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{12}} = -\cos\alpha_{21} \mp Ad', \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial s_{23}} = \pm A' f',$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{21}} = -\cos\alpha_{21} \pm Ad'', \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial s_{13}} = \mp A' f'',$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{13}} = \pm Ae', \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial s_{12}} = \pm A' f''',$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{2,3}} = \mp Ae'',$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{12}} = -\sin\alpha_{21}\sec\varphi_2 \pm Bd', \qquad \frac{\partial\lambda_2}{\partial s_{23}} = \mp B'f',$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{21}} = -\sin\alpha_{21}\sec\varphi_2 \mp Bd'', \qquad \frac{\partial\lambda_2}{\partial s_{13}} = \pm B'f'',$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{13}} = \mp Be', \qquad \frac{\partial\lambda_2}{\partial s_{12}} = \mp B'f''', \tag{14}$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{23}} = \pm Be'',$$

$$\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{12}} = -\sin\alpha_{21}\operatorname{tg}\varphi_2 \pm Cd', \qquad \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial s_{23}} = \mp C'f',$$

$$\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{21}} = -\sin\alpha_{21}\operatorname{tg}\varphi_2 \mp Cd'', \qquad \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial s_{13}} = \pm C'f'',$$

$$\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{13}} = \mp Ce', \qquad \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial s_{12}} = \mp C'f''',$$

$$\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{23}} = \pm Ce'',$$

где

$$A = \sin z_{21}\sin\alpha_{21}, \qquad d' = \cos a_1 \operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} C_1,$$

$$A' = A\frac{\rho''}{s_{12}}\operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} A_2, \qquad d'' = \cos a_2 \operatorname{cosec} A_2 \operatorname{cosec} C_2,$$

$$B = \sin z_{21}\cos\alpha_{21}\sec\varphi_2, \qquad e' = \operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} C_1,$$

$$B' = B\frac{\rho''}{s_{12}}\operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} A_2, \qquad e'' = \operatorname{cosec} A_2 \operatorname{cosec} C_2,$$

$$C = \sin z_{21}\cos\alpha_{21}\operatorname{tg}\varphi_2 - \cos z_{21}, \qquad f' = \operatorname{ctg} C_1 + \operatorname{ctg} C_2 \cos A_3,$$

$$C' = C\frac{\rho''}{s_{12}}\operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} A_2, \qquad f'' = \operatorname{ctg} C_2 + \operatorname{ctg} C_1 \cos A_3,$$

$$f''' = \operatorname{ctg} C_2 \cos A_1 - \operatorname{ctg} C_1 \cos A_2,$$

$$\operatorname{ctg} C_1 = -\operatorname{ctg} z_{12}\sin A_1 \operatorname{cosec} K_1 + \cos A_1 \operatorname{ctg} K_1,$$

$$\operatorname{ctg} C_2 = -\operatorname{ctg} z_{21}\sin A_2 \operatorname{cosec} K_2 + \cos A_2 \operatorname{ctg} K_2,$$

$$\cos K_1 = (\cos z_{13} - \cos z_{12}\cos A_1)\operatorname{cosec} z_{12}\operatorname{cosec} A_1,$$

$$\cos K_2 = (\cos z_{23} - \cos z_{21}\cos A_2)\operatorname{cosec} z_{21}\operatorname{cosec} A_2.$$

Плоские A_i и горизонтальные a_i углы вычисляются с помощью выражений (6). Погрешность формул (14) в широтах, не близких к 90°, порядка $\gamma\delta z$ и $\gamma''\frac{\delta s}{s}$. Верхний знак следует брать, когда треугольник *1, 2, 3* располагается справа от направления *1—2*, нижний — в противном случае.

Внешний вид записи условных уравнений астрономических широт, долгот и азимутов в пространственной трилатерации и в угловой пространственной триангуляции совершенно одинаков, если придерживаться принципа составления уравнений и обозначений, принятых в работе [1]. Например, широтное условное уравнение для выбранной ходовой линии будет выглядеть так:

$$p_1^{1,4}\,\delta\varphi_1 + p_1^{2,4}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_p}\,\delta l_p\right)_1 + p_1^{3,4}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial l_p}\,\delta l_p\right)_2 + \left(\frac{\partial\varphi_4}{\partial l_p}\,\delta l_p\right)_3 + p_3^{1,4}\,(\delta\alpha_{1,5} + \delta a_1^{5,2}) +$$

$$+ p_3^{2,4}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{2,1}}{\partial l_p}\,\delta l_p\right)_1 - \delta a_2^{1,6} - \delta a_2^{3,6}\right] +$$

$$+ p_3^{3,4}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{3,2}}{\partial l_p}\,\delta l_p\right)_2 - \delta a_3^{2,6} - \delta a_3^{6,7} - \delta a_3^{7,4}\right] - \delta\varphi_4 + (\varphi_4' - \varphi_4) = 0. \quad (15)$$

Однако в этих уравнениях символы $\left(\frac{\partial P}{\partial l_p}\,\delta l_p\right)_i$, где $P = \varphi, \lambda, \alpha$, имеющие смысл сумм произведений частных производных от рассматриваемой функции по измеренным элементам треугольника (зенитным расстояниям и длинам сторон) на соответствующие поправки этих элементов, должны вычисляться с помощью формул (14). Поправки δa_i^{jk} горизонтальных углов, как уже указывалось, нужно выразить по формулам (9) через поправки зенитных расстояний и длин сторон. Формулы для вычисления коэффициентов p (а также q и r в долготном и азимутальном уравнениях) приведены в работе [2].

Координатные условные уравнения между пунктами *1* и *4* при указанном выборе ходовой линии запишутся так:

условное уравнение абсцисс

$$- \Delta z_{4,1}\cos\lambda_1\,\delta\varphi_1 - \Delta y_{4,1}\,\delta\lambda_1 + (\Delta y_{4,1}\sin\varphi_1 - \Delta z_{4,1}\cos\varphi_1\sin\lambda_1)\,\delta\alpha_{1,2} -$$

$$- \Delta z_{4,2}\cos\lambda_2\,\delta\varphi_2 - \Delta y_{4,2}\,\delta\lambda_2 + (\Delta y_{4,2}\sin\varphi_2 - \Delta z_{4,2}\cos\varphi_2\sin\lambda_2)\,\delta\alpha_{2,3} -$$

$$- \Delta z_{4,3}\cos\lambda_3\,\delta\varphi_3 - \Delta y_{4,3}\,\delta\lambda_3 + (\Delta y_{4,3}\sin\varphi_3 - \Delta z_{4,3}\cos\varphi_3\sin\lambda_3)\,\delta\alpha_{3,4} +$$

$$+ (\Delta z_{2,1}\,m_1 - \Delta y_{2,1}\,n_1)\,\delta z_{1,2} + (\Delta z_{3,2}\,m_2 - \Delta y_{3,2}\,n_2)\,\delta z_{2,3} +$$

$$+ (\Delta z_{4,3}\,m_3 - \Delta y_{4,3}\,n_3)\,\delta z_{3,4} + \frac{\Delta x_{2,1}}{s_{1,2}}\,\delta s_{1,2} + \frac{\Delta x_{3,2}}{s_{2,3}}\,\delta s_{2,3} +$$

$$+ \frac{\Delta x_{4,3}}{s_{3,4}}\,\delta s_{3,4} + (x_4' - x_4) = 0, \quad (16)$$

условное уравнение ординат

$$- \Delta z_{4,1}\sin\lambda_1\,\delta\varphi_1 + \Delta x_{4,1}\,\delta\lambda_1 + (\Delta z_{4,1}\cos\varphi_1\cos\lambda_1 - \Delta x_{4,1}\sin\varphi_1)\,\delta\alpha_{1,2} -$$

$$- \Delta z_{4,2}\sin\lambda_2\,\delta\varphi_2 + \Delta x_{4,2}\,\delta\lambda_2 + (\Delta z_{4,2}\cos\varphi_2\cos\lambda_2 - \Delta x_{4,2}\sin\varphi_2)\,\delta\alpha_{2,3} -$$

$$- \Delta z_{4,3}\sin\lambda_3\,\delta\varphi_3 + \Delta x_{4,3}\,\delta\lambda_3 + (\Delta z_{4,3}\cos\varphi_3\cos\lambda_3 - \Delta x_{4,3}\sin\varphi_3)\,\delta\alpha_{3,4} +$$

$$+ (\Delta x_{2,1}\,n_1 - \Delta z_{2,1}\,l_1)\,\delta z_{1,2} + (\Delta x_{3,2}\,n_2 - \Delta z_{3,2}\,l_2)\,\delta z_{2,3} +$$

$$+ (\Delta x_{4,3}\,n_3 - \Delta z_{4,3}\,l_3)\,\delta z_{3,4} + \frac{\Delta y_{2,1}}{s_{1,2}}\,\delta s_{1,2} + \frac{\Delta y_{3,2}}{s_{2,3}}\,\delta s_{2,3} +$$

$$+ \frac{\Delta y_{4,3}}{s_{3,4}}\,\delta s_{3,4} + (y_4' - y_4) = 0, \quad (17)$$

условное уравнение аппликат

$$(\Delta y_{4,1}\sin\lambda_1+\Delta x_{4,1}\cos\lambda_1)\delta\varphi_1+(\Delta x_{4,1}\sin\lambda_1-\Delta y_{4,1}\cos\lambda_1)\cos\varphi_1\,\delta\alpha_{1,2}+$$
$$+(\Delta y_{4,2}\sin\lambda_2+\Delta x_{4,2}\cos\lambda_2)\delta\varphi_2+(\Delta x_{4,2}\sin\lambda_2-\Delta y_{4,2}\cos\lambda_2)\cos\varphi_2\,\delta\alpha_{2,3}+$$
$$+(\Delta y_{4,3}\sin\lambda_3+\Delta x_{4,3}\cos\lambda_3)\delta\varphi_3+(\Delta x_{4,3}\sin\lambda_3-\Delta y_{4,3}\cos\lambda_3)\cos\varphi_3\,\delta\alpha_{3,4}+$$
$$+(\Delta y_{2,1}l_1-\Delta x_{2,1}m_1)\delta z_{1,2}+(\Delta y_{3,2}l_2-\Delta x_{3,2}m_2)\delta z_{2,3}+$$
$$+(\Delta y_{4,3}l_3-\Delta x_{4,3}m_3)\delta z_{3,4}+\frac{\Delta z_{2,1}}{s_{1,2}}\delta s_{1,2}+\frac{\Delta z_{3,2}}{s_{2,3}}\delta s_{2,3}+$$
$$+\frac{\Delta z_{4,3}}{s_{3,4}}\delta s_{3,4}+(z_4'-z_4)=0. \qquad (18)$$

В уравнениях (16), (17), (18) поправки угловых элементов выражены в радианах. Величины l_i, m_i, n_i определяются формулами

$$l_i=\sin\lambda_i\cos\alpha_{ik}-\sin\varphi_i\cos\lambda_i\sin\alpha_{ik},$$
$$m_i=-\cos\lambda_i\cos\alpha_{ik}-\sin\varphi_i\sin\lambda_i\sin\alpha_{ik},$$
$$n_i=\cos\varphi_i\sin\alpha_{ik},$$

где i и k — соответственно номера начальной и конечной вершин стороны ik ходовой линии.

Величины Δx, Δy, Δz с соответствующими индексами суть разности вычисленных координат вершин ходовой линии, например, $\Delta z_{4,1}=z_4'-z_1'$, $\Delta x_{3,2}=x_3'-x_2'$. Поправки $\delta\varphi_i$, $\delta\lambda_i$ астрономических координат вершин ходовой линии и поправки $\delta\alpha_{ik}$ астрономических азимутов ее сторон являются функциями поправок зенитных расстояний и длин сторон, принимавших участие в передаче астрономических координат и азимутов по этой линии, и определяются выражениями

$$\delta\varphi_2=\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_р}\delta l_р\right)_1,\quad \delta\lambda_2=\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial l_р}\delta l_р\right)_1,$$
$$\delta\varphi_3=\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial l_р}\delta l_р\right)_2,\quad \delta\lambda_3=\left(\frac{\partial\lambda_3}{\partial l_р}\delta l_р\right)_2,$$
$$\partial\alpha_{1,2}=\delta\alpha_{1,5}+\delta a_1^{2,5},$$
$$\delta\alpha_{2,3}=\left(\frac{\partial\alpha_{2,1}}{\partial l_р}\delta l_р\right)_1-\delta a_2^{1,6}-\delta a_2^{3,6},$$
$$\delta\alpha_{3,4}=\left(\frac{\partial\alpha_{3,2}}{\partial l_p}\partial l_p\right)_2-\delta a_3^{2,6}-\delta a_3^{6,7}-\delta a_3^{4,7}.$$

Формулы для последовательного вычисления координат x, y, z вершин ходовой линии можно найти, например, в работе [3].

Условные уравнения жесткости направлений выходных сторон в общем виде записываются так же, как и в пространственной угловой триангуляции. В нашем примере для стороны 4—7 и астропункта 4 будем иметь

$$\cos(\Lambda_{4,7}-\lambda_4)\delta\varphi_4-\cos\varphi_4\sin(\Lambda_{4,7}-\lambda_4)\delta\alpha_{4,7}-\cos P_{4,7}\delta z_{4,7}+ \qquad (19)$$
$$+(\Phi_{4,7}'-\Phi_{4,7})=0,$$
$$\operatorname{tg}\Phi_{4,7}\sin(\Lambda_{4,7}-\lambda_4)\delta\varphi_4+\delta\lambda_4+[-\sin\varphi_4+\operatorname{tg}\Phi_{4,7}\cos\varphi_4\cos(\Lambda_{4,7}-\lambda_4)]\delta\alpha_{4,7}+$$
$$+\sec\Phi_{4,7}\sin P_{4,7}\delta z_{4,7}+(\Lambda_{4,7}'-\Lambda_{4,7})=0, \qquad (20)$$

где

$$\cos P_{4,7} = -\cos(\Lambda_{4,7} - \lambda_4)\cos\alpha_{4,7} + \sin\varphi_4 \sin(\Lambda_{4,7} - \lambda_4)\sin\alpha_{4,7},$$

$$\sin P_{4,7} = \sec\Phi_{4,7}\cos\varphi_4 \sin\alpha_{4,7}.$$

В уравнениях (19), (20) величины $\delta\varphi_4$, $\delta\lambda_4$, $\delta\alpha_{4,7}$ суть поправки измеренных в пункте *4* астрономических координат и азимута. Истинные значения параметров $\Phi_{4,7}$, $\Lambda_{4,7}$, определяющих направление стороны *4—7* относительно плоскости экватора и плоскости начального астрономического меридиана, определяют формулы

$$\operatorname{tg}\Phi_{4,7} = \frac{z_7 - z_4}{\sqrt{(x_7 - x_4)^2 + (y_7 - y_4)^2}}, \quad \operatorname{tg}\Lambda_{4,7} = \frac{y_7 - y_4}{x_7 - x_4}.$$

Вычисленные значения $\Phi'_{4,7}$, $\Lambda'_{4,7}$ тех же параметров будут получены с помощью формул

$$\cos\Phi_{4,7}\cos\Lambda_{4,7} = l_{4,7},$$

$$\cos\Phi_{4,7}\sin\Lambda_{4,7} = m_{4,7},$$

$$\sin\Phi_{4,7} = n_{4,7},$$

$$l_{4,7} = \cos z_{4,7}\cos\varphi_4\cos\lambda_4 - \sin z_{4,7}(\sin\lambda_4\sin\alpha_{4,7} + \sin\varphi_4\cos\lambda_4\cos\alpha_{4,7}),$$

$$m_{4,7} = \cos z_{4,7}\cos\varphi_4\sin\lambda_4 + \sin z_{4,7}(\cos\lambda_4\sin\alpha_{4,7} - \sin\varphi_4\sin\lambda_4\cos\alpha_{4,7}),$$

$$n_{4,7} = \cos z_{4,7}\sin\varphi_4 + \sin z_{4,7}\cos\varphi_4\cos\alpha_{4,7}.$$

Если бы в пункте *4* не было астрономических определений, то уравнения, аналогичные уравнениям (19) и (20), следовало бы составить для астропункта *1* и той же стороны *4—7*. Общий вид подобных уравнений приведен в работе [1]. Нужно только иметь в виду, что выражения $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l_p}\delta l_p\right)$, $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial l_p}\delta l_p\right)$, $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial l_p}\delta l_p\right)$, которые будут в них фигурировать, вычисляются с помощью формул (14), а поправки горизонтальных углов выражаются через поправки зенитных расстояний и длин сторон треугольников трилатерации.

Мы рассмотрели наиболее типичные условные уравнения в пространственной трилатерации, причем полагали, что астрономические координаты и азимуты получают поправки из уравнивания (разумеется, если для этого достаточно избыточных исходных данных). Если астрономические определения считать безошибочными, то поправки $\delta\varphi$, $\delta\lambda$, $\delta\alpha$ должны быть введены в уравнивание с бесконечным весом, то есть их следует положить равными нулю. Однако нужно иметь в виду, что не во всех случаях это можно сделать. Так, в нашем последнем примере (рис. 2) максимум две из трех величин $\delta\varphi_4$, $\delta\lambda_4$, $\delta\alpha_{4,7}$ можно принять равными нулю, так как в противном случае уравнения (19) и (20) могут оказаться несовместными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 7. Изд-во Львов. ун-та, 1968.

2. Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 6. Изд-во Львов. ун-та, 1967.

3. Филиппов А. Е. Координатные условные уравнения в сети пространственной триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 7. Изд-во Львов. ун-та, 1968.

Работа поступила
11 апреля 1968 г.