РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 16

УДК 528.14

Н. С. ШЕВЧУН

УРАВНИВАНИЕ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ХОДА

Государственная геодезическая сеть, развиваемая в виде полигонометрии, уравнивается по способу наименьших квадратов [4].

Общепринятая методика совместной обработки разнородных измерений в полигонометрических сетях состоит в решении условных уравнений, выраженных в двух разнородных числовых полях линейной и угловой размерностей. В условных уравнениях, представленных таким образом, коэффициенты при поправках разнородных измерений, как правило, сильно различаются по абсолютной величине, и если их пустить непосредственно в дальнейшую обработку, то уравнительные вычисления осложняются и приводят к потерям инженерного труда и времени. Вопросу устранения этих противоречий уделяли внимание ряд авторов [3, 6, 8]. Оригинальное решение найдено А. И. Кобылиным [5].

Предложим иной путь решения этой задачи, позволяющий выравнять коэффициенты при поправках в условных уравнениях и получить несколько иные формулы для сопоставления точности угловых и линейных измерений в полигонометрических сетях.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть имеем полигонометрический ход произвольной формы, проложенный между исходными пунктами и исходными направлениями (см. рисунок).

Для указанной конструкции полигонометрического хода в общепринятых обозначениях условные уравнения имеют вид [7]

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} v_{\beta_i} + w_\beta = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} v_{\Delta x_i} + w_x = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} v_{\Delta y_i} + w_y = 0, \tag{1}$$

где n — число сторон полигонометрического хода.

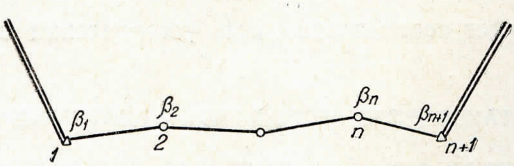

Схема полигонометрического хода.

В координатных условных уравнениях выразим поправки приращений координат через поправки к результатам непосредственно измеренных величин. Тогда для i-го приращения по оси абсцисс имеем:

$$v_{\Delta x_i} = \cos\alpha_i v_{s_i} - \left(S_i \sin\alpha_i \frac{v_{\beta_1}}{\rho} + S_i \sin\alpha_i \frac{v_{\beta_2}}{\rho} + \cdots + S_i \sin\alpha_i \frac{v_{\beta_i}}{\rho}\right). \tag{2}$$

Соотношение (2) выразим в угловой мере и потребуем, чтобы при соответствующих поправках имелись коэффициенты одного порядка. Для этого левую и правую части равенства (2) умножим на величину, равную

$$\frac{\rho}{S_{\text{ср}}},$$

где $\rho = 206264{,}8$ — число секунд в радиане; $S_{\text{ср}}$ — средняя длина стороны полигонометрического хода. Все линейные величины должны быть выражены в единицах требуемой точности определения поправок к результатам линейных измерений, например, в миллиметрах или сантиметрах. Тогда, расписав соотношение (2) для всего хода, получим условное уравнение x и, по аналогии, y в таком виде:

$$-\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_{n+1} - y_i}{S_{\text{ср}}} \sin\alpha_i v_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \cos\alpha_i v''_{S_i} + w''_x = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_{n+1} + x_i}{S_{\text{ср}}} \cos\alpha_i v_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \sin\alpha_i v''_{S_i} + w''_y = 0, \tag{3}$$

где

$$v''_{S_i} = \frac{\rho}{S_{\text{ср}}} v_{S_i}; \quad w''_x = \frac{\rho}{S_{\text{ср}}} w_x; \quad w''_y = \frac{\rho}{S_{\text{ср}}} w_y.$$

Условные уравнения (1), (3), выраженные в угловой мере, будем решать двухгрупповым методом. Разбивку условных уравнений на группы и преобразование коэффициентов уравнений второй группы произведем, как это сделано в [5]. Тогда условные уравнения (3) с преобразованными коэффициентами примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\eta_i}{S_{\text{ср}}} v_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \cos\alpha_i v''_{S_i} + w''_x = 0;\\ -&\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\xi_i}{S_{\text{ср}}} v_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \sin\alpha_i v''_{S_i} + w''_y = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Нетрудно проследить, что представленные таким образом условные уравнения второй группы имеют коэффициенты при поправках в основном одного порядка и достаточно близко согласуются между собой по абсолютной величине. Обратим внимание, что условные уравнения первой и второй групп выражены в числовом поле угловой размерности, а поправка линейной величины в угловой мере

$$v''_{S_i} = \frac{\rho}{S_{\text{ср}}} v_{S_i}.$$

Это положение будет использовано при установлении весов разнородных измерений.

2. УСТАНОВЛЕНИЕ ВЕСОВ РАЗНОРОДНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Для определения веса i-го измерения воспользуемся известной из теории ошибок формулой

$$P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}. \tag{5}$$

Поскольку для совместной обработки разнородных измерений принято числовое поле угловой размерности, то размерность ошибки единицы веса необходимо принять равную размерности угловой величины. В соответствии с формулой (5) для измеренного угла получим

$$\frac{1}{P_\beta} = \frac{m_\beta^2}{\mu_\beta^2}, \tag{6}$$

где индекс при μ указывает принятую для нее размерность числового поля.

Определим значение обратного веса линейных измерений. Так как

$$S_i'' = \frac{\rho}{S_{ср}} S_i,$$

то

$$\frac{1}{P_{S_i''}} = \frac{\rho^2}{S_{ср}^2} \cdot \frac{1}{P_{S_i}}.$$

Но

$$\frac{1}{P_{S_i}} = \frac{m_{S_i}^2}{\mu_\beta^2},$$

отсюда

$$\frac{1}{P_{S_i''}} = \frac{\rho^2}{S_{ср}^2} \cdot \frac{m_{S_i}^2}{\mu_\beta^2}. \tag{7}$$

Формулы (6) и (7) решают задачу определения обратных весов результатов разнородных измерений при совместной их обработке, если будут известны нам достаточно надежно средние квадратические ошибки разнородных величин. Отметим, что представленные таким образом значения обратных весов результатов разнородных измерений являются безразмерными величинами.

На сегодняшний день полигонометрия как метод создания геодезической сети получила широкое распространение благодаря эффективному применению свето- и радиодальномеров. Современные свето- и радиодальномеры позволяют определять расстояния с различной точностью. По исследованиям ряда авторов [1, 2, 7] при измерении сторон в полигонометрических сетях светодальномерами типа СТ и NASM для определения весов линий можно пользоваться средней квадратической ошибкой средней линии полигонометрического хода. Тогда для всех линий $P = \text{const}$.

Получим выражение обратного веса линейных измерений, когда имеется основание положить $m_{S_i} = m_{S_{ср}}$. Если в формулу (7) вместо m_{S_i} подставить $m_{S_{ср}}$, то найдем

$$\frac{1}{P_{S_i''}} = \frac{\rho^2}{S_{ср}^2} \cdot \frac{m_{S_{ср}}^2}{\mu_\beta^2}.$$

Но

$$\frac{m_{S_{ср}}^2}{S_{ср}^2} = \frac{1}{T_{S_{ср}}^2},$$

тогда

$$\frac{1}{P_{S''}} = \frac{1}{T_{S_{ср}}^2} \cdot \frac{\rho^2}{\mu_\beta^2}. \tag{8}$$

Итак, для определения веса линейных измерений необходимо знать среднюю относительную ошибку средней линии данного геодезического построения. Очевидно, формула (8) обладает общностью для определения веса линейных измерений независимо от типа применяемых светодальномеров, если значения минимальных и максимальных расстояний (при соответствующих средних сторонах сети) не отклоняются от данных, полученных в работе [2]. Это значительно облегчает уравнительные вычисления. Средняя относительная ошибка средней линии может быть определена в каждом случае на основе конкретно разработанной методики для данного типа светодальномера.

Положим

$$\mu_\beta = m_\beta.$$

Тогда формула (8) после очевидных преобразований примет вид

$$\frac{1}{P_{S''}} = \frac{T_\beta^2}{T_{S_{\text{ср}}}^2}, \qquad (9)$$

где $T_{S_{\text{ср}}}$ и T_β — относительные ошибки линейной и угловой величин. Следовательно, совместная обработка угловых и линейных измерений связана с установлением отношения их относительных ошибок, если имеется основание положить, что $m_{S_i} = m_{S_{\text{ср}}}$. Формулы (6), (7) и (9) решают задачу определения обратных весов разнородных измерений при совместной их обработке в числовом поле угловой размерности в зависимости от наличия исходной информации о точности последних.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПРАВОК

На основании условных уравнений (4) и принятых весов разнородных измерений перейдем теперь к нормальным уравнениям коррелат

$$\begin{Vmatrix} \left[\dfrac{aa}{P}\right] & \left[\dfrac{ab}{P}\right] \\ \left[\dfrac{ab}{P}\right] & \left[\dfrac{bb}{P}\right] \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -w_x'' \\ -w_y'' \end{Vmatrix}, \qquad (10)$$

где

$$\left[\frac{aa}{P}\right] = \frac{1}{P_\beta}\left[\left(\frac{\eta}{S_{\text{ср}}}\right)^2\right] + \left[\frac{\cos^2\alpha}{P_{S''}}\right];$$

$$\left[\frac{bb}{P}\right] = \frac{1}{P_\beta}\left[\left(\frac{\xi}{S_{\text{ср}}}\right)^2\right] + \left[\frac{\sin^2\alpha}{P_{S''}}\right];$$

$$\left[\frac{ab}{P}\right] = -\frac{1}{P_\beta}\left[\frac{\eta\xi}{S_{\text{ср}}^2}\right] + \left[\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{P_{S''}}\right].$$

Таблица 1

Таблица коэффициентов условных уравнений 2-й группы

№	$\frac{1}{P}$	a	b	v
β_A	1	−1,11	+1,35	+1,4
β_{74}	1	−0,53	+0,48	+0,5
β_{75}	1	+0,28	+0,34	−0,1
β_{76}	1	+0,91	−0,67	−0,9
β_B	1	+0,45	−1,50	−0,9
S_{A-74}	1,74	+0,83	+0,56	−2,7
S_{74-75}	1,74	+0,18	+0,98	+1,3
S_{75-76}	1,74	+0,85	+0,53	−2,9
S_{76-B}	1,74	+0,87	−0,49	−5,3

Решив нормальные уравнения коррелат (10), для искомых поправок получим

$$v_{\beta_i} = \frac{1}{P_\beta}\left(k_1\frac{\eta_i}{S_{\text{ср}}} - k_2\frac{\xi_i}{S_{\text{ср}}}\right), \quad v_{S_i} = \frac{S_{\text{ср}}}{P_{S_i''}\rho}(k_1\cos\alpha_i + k_2\sin\alpha_i). \qquad (11)$$

Для иллюстрации предлагаемого приема выравнивания коэффициентов при поправках в условных уравнениях и определения весов по полученным формулам приведем пример (табл. 1) строгого уравнивания полигонометрического хода с линиями, измеренными светодальномером. Для последних можно принять $m_{S_i} = m_{S_{cp}}$. Данные взяты из [7, стр. 111].

На основании коэффициентов условных уравнений и численных значений обратных весов, представленных в таблице, перейдем к нормальным уравнениям коррелат

$$\begin{vmatrix} +6{,}45 & -1{,}78 \\ -1{,}78 & +7{,}99 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5{,}65 \\ +4{,}24 \end{vmatrix}.$$

Отсюда для коррелат получим

$$\begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}78 \\ +0{,}36 \end{vmatrix}.$$

Кроме того, приведем числовой пример строгого уравнивания полигонометрического хода с учетом предлагаемого приема выравнивания коэффициентов при поправках в условных уравнениях и определения весов по полученным формулам (табл. 2).

Таблица 2

Таблица коэффициентов условных уравнений 2-й группы

№	$\frac{1}{P}$	a	b	v
β_{16}	1	—1,75	—1,68	—5,2
β_{15}	1	—1,17	—0,30	—1,2
β_{14}	1	—0,63	+0,46	+1,0
β_{13}	1	+0,52	+0,42	+1,3
β_{38}	1	+1,18	+0,50	+1,8
β_{31}	1	+1,86	+0,59	+2,3
S_{16-15}	2,07	—0,92	+0,39	+2,3
S_{15-14}	1,27	—0,82	+0,58	+2,5
S_{14-13}	1,58	+0,04	+1,00	+6,4
S_{13-38}	0,92	—0,13	+0,99	+3,6
S_{38-1}	0,94	—0,13	+0,99	+3,7

Данные взяты из [5].

На основании коэффициентов условных уравнений и численных значений обратных весов, приведенных в табл. 2, перейдем к нормальным уравнениям коррелат.

$$\begin{vmatrix} +12{,}59 & +3{,}38 \\ +3{,}38 & +8{,}04 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +13{,}75 \\ +23{,}38 \end{vmatrix}.$$

Отсюда для коррелат получим

$$\begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +0{,}35 \\ +2{,}76 \end{vmatrix}^{*}.$$

* Поскольку линейные измерения в уравниваемом полигонометрическом ходе производились непосредственным способом, то $m_{S_i} = \mu\sqrt{S}$. Отсюда обратный вес каждой линии необходимо определять по формуле

$$\frac{1}{P_{S''_i}} = \frac{\rho^2}{S^2_{\text{ср.}}} \cdot \frac{m^2_{S_i}}{\mu^2_\beta} = S_i \frac{\rho^2}{S^2_{\text{ср}}} \cdot \frac{\mu^2}{\mu^2_\beta} = S_i q_S,$$

где $\frac{\rho^2}{S^2_{\text{ср}}} \cdot \frac{\mu^2}{\mu^2_\beta} = q_S$ — обратный вес линейной величины длиной в 1 *м*.

Данные числовых примеров наглядно подтверждают близкую согласованность по абсолютной величине коэффициентов как в условных, так и в нормальных уравнениях, а численные значения обратных весов и коррелат близки по величине коэффициентам в условных уравнениях. При этом снижение трудоемкости вычислений очевидно.

Таким образом, обработка полигонометрического хода в числовом поле угловой размерности с учетом предлагаемых преобразований позволяет при уравнительных вычислениях оперировать с числами малого и, в основном, одного порядка, что снижает трудоемкость работ. Особенно это ощущается при выполнении последних на малых вычислительных машинах. Ясно, что такое предварительное выравнивание коэффициентов в условных уравнениях необходимо и при уравнительных вычислениях на ЭЦВМ.

Для определения обратных весов разнородных измерений получен новый вид формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков В. Д., Громов Е. Г., Демушкин А. И. Расчет допусков при измерении линий полигонометрии светодальномером СТ-62М. «Геодезия и картография», № 8, 1967.

2. Громов Е. Г. К вопросу об определении весов в светодальномерной полигонометрии. «Геодезия и картография», № 11, 1969.

3. Данилов В. В. Точная полигонометрия. Геодезиздат, М., 1946.

4. Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР. «Недра», М., 1966.

5. Кобылин А. И. Уравнивание полигонометрического хода и оценка точности. Научн. тр. ХГИ, т. 4, Харьков, 1958.

6. Купчинов И. И. Уравновешивание сетей триангуляции и полигонометрии. Геодезиздат, М., 1954.

7. Литвинов Б. А. Основные вопросы построения и уравнивания полигонометрических сетей. Геодезиздат, М., 1962.

8. Попов В. В. Уравновешивание полигонов. Геодезиздат, М., 1954.

Работа поступила 6 января 1971 года.
Рекомендована кафедрой геодезии Харьковского института инженеров коммунального строительства.