УДК 528.235

Г. А. ШЕХОВЦОВ, канд. техн. наук
Горьковский инженерно-строительный институт

ПОСТРОЕНИЕ ПОДЕРЫ ПРЯМОЙ УГЛОВОЙ ЗАСЕЧКИ

Прямые угловые засечки широко применяются на практике. Однако существующие аналитические способы оценки их точности трудоемки, лишены наглядности и не дают исчерпывающей информации. В настоящей статье предлагается графический способ оценки точности прямой угловой засечки, лишенный этих недостатков.

Примем следующие обозначения: $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — исходные пункты с известными координатами; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — дирекционные углы направлений засечки; $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — длины сторон засечки; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — углы засечки.

Среднеквадратические ошибки координат и положения точки P относительно исходных пунктов можно вычислить по формулам:

$$m_x^2 = \frac{[BB]}{[AA][BB]-[AB]^2} m_\alpha^2; \quad m_y^2 = \frac{[AA]}{[AA][BB]-[AB]^2} m_\alpha^2; \qquad (1)$$

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = \frac{[AA]+[BB]}{[AA][BB]-[AB]^2} m_\alpha^2,$$

где m_x и m_y — среднеквадратические ошибки координат точки P; m_α — среднеквадратическая ошибка направлений засечки; M — среднеквадратическая ошибка положения точки P:

$$A_i = \frac{\sin \alpha_i}{S_i} \rho; \ B_i = \frac{\cos \alpha_i}{S_i} \rho; \ \rho = 206265''.$$

Максимум информации о погрешности положения точки P (наибольшую и наименьшую ошибки, ошибки по координатным осям и любому другому направлению) может дать кривая средних ошибок — подера среднеквадратического эллипса погрешностей.

Для графического построения подеры необходимо знать большую A_0 и малую B_0 полуоси среднего квадратического эллипса погрешностей (наибольшую и наименьшую ошибки) и дирекционный угол φ_{0_1} большой полуоси. Применительно к рассматриваемому случаю аналитическое решение выполняем по формуле [1]

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2[AB]}{[BB]-[AA]}, \tag{2}$$

причем получаем два значения дирекционного угла, отличающиеся на 90°: φ_{0_1} соответствует большой полуоси, φ_{0_2} — малой.

При вычислениях по формуле (2) следует придерживаться следующих правил:

1. Если $2\,[AB]$ — величина положительная, то при положительном значении дроби (2) $\varphi_{0_1}=\varphi_0$, $\varphi_{0_2}=90°+\varphi_0$, а при отрицательном — $\varphi_{0_1}=90°-\varphi_0$; $\varphi_{0_2}=180°-\varphi_0$.

2. Если $2\,[AB]$ — величина отрицательная, то при положительном значении дроби (2) $\varphi_{0_1}=90°+\varphi_0$, $\varphi_{0_2}=\varphi_0$, а при отрицательном — $\varphi_{0_1}=180°-\varphi_0$, $\varphi_{0_2}=90°-\varphi_0$.

$$A_0^2 = \frac{m_\alpha^2}{[AA]-[AB]\operatorname{tg}\varphi_{0_1}}; \ B_{0_2} = \frac{m_\alpha^2}{[AA]-[AB]\operatorname{tg}\varphi_{0_2}}. \tag{3}$$

По известным значениям A_0, B_0, φ_{0_1} можно построить подеру по методике, описанной, например, в работах [1, 2].

Вычисления по формулам (1), (2), (3) громоздки, поэтому разработан графический способ построения подеры, который не требует аналитических расчетов, прост в исполнении и по точности не уступает аналитическому.

Рассмотрим простую угловую засечку (рис. 1). В данном случае формулы (1) с учетом коэффициентов A_i и B_i примут вид:

$$m_x^2 = \frac{m_\alpha^2}{\rho^2 \sin^2\gamma}\{S_1^2\cos^2\alpha_2 + S_2^2\cos^2\alpha_1\}; \tag{4}$$

$$m_y^2 = \frac{m_\alpha^2}{\rho^2 \sin^2\gamma}\{S_1^2\sin^2\alpha_2 + S_2^2\sin^2\alpha_1\}; \ M^2 = \frac{m_\alpha^2}{\rho^2 \sin^2\gamma}\{S_1^2+S_2^2\}.$$

Подера имеет с эллипсом четыре общие точки *1*, *2*, *3* и *4*. Они соответствуют экстремальным значениям погрешностей положения точки P. Здесь $\overline{P-1}=\overline{P-2}=A_0$, $\overline{P-3}=\overline{P-4}=B_0$. Эллипс вписан в параллелограмм, стороны которого параллельны сторонам засечки и отстоят от последних на расстоянии $\frac{m_\alpha S_i}{\rho}$. Таким образом, сторонами параллелограмма являются линии крайних положений точки P, а величины $\frac{m_\alpha S_i}{\rho}$ характеризуют поперечные смещения этой точки.

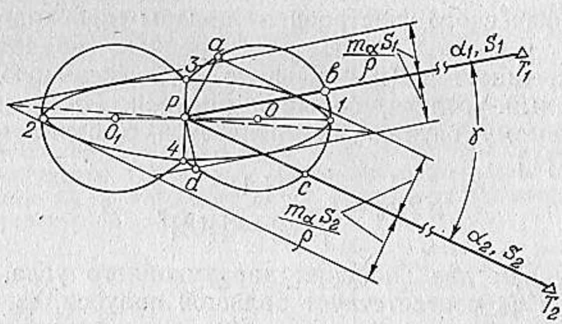

Рис. 1. Средний квадратический эллипс погрешностей и подера простой угловой засечки.

Отличительной особенностью подеры является следующее. Если через точку P провести две взаимно перпендикулярные прямые, то расстояния между точками пересечения этих прямых с подерой характеризует ошибку положения точки P. Так, $\overline{3-1}=\overline{3-2}=ac=db=M$.

Кривая $abcd$ является дугой окружности с центром O, лежащим на большой полуоси эллипса. В общем случае ($S_1 \neq S_2$) направления большой оси эллипса и большой диагонали параллелограмма не совпадают. Совпадение их возможно лишь при равенстве сторон засечки.

Из сказанного следует, что задача построения подеры простой угловой засечки сводится к отысканию по точкам a, b, c и d центра окружности O. Графически эта задача решается следующим образом (рис. 2).

В произвольно выбранной точке P строим угол засечки γ. На сторонах этого угла откладываем длины S_1 и S_2 в масштабе 1:25000 и получаем точки T_1 и T_2 В точке P восстанавливаем перпендикуляры к направлениям засечки. Откладываем на них в масштабе 1:1 отрезки $P_a=\frac{m_\alpha S_2}{\rho}$ и $Pd=\frac{m_\alpha S_1}{\rho}$.

В точке T_2 восстанавливаем перпендикуляр к линии PT_2, на котором откладываем S_1 и получаем точку D. Расстояние $PD=$

$=\sqrt{S_1^2+S_2^2}$. Проводим на расстоянии, равном PD, линию, параллельную PT_2, до пересечения в точке E с продолжением малой стороны засечки, следовательно, $PE=\frac{\sqrt{S_1^2+S_2^2}}{\sin\gamma}$. Через точку E проводим линию, параллельную T_1d, до пересечения с продолжением прямой Pd в точке e. В результате получаем $Pe=\frac{m_a\sqrt{S_1^2+S_1^2}}{\rho\sin\gamma}=M$.

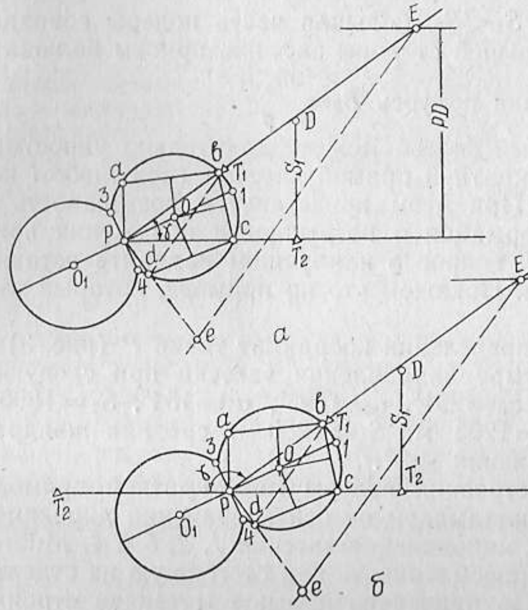

Рис. 2. Порядок построения подеры при остром (а) и тупом (б) углах простой угловой засечки.

Проводя из точек a и d как из центров дуги окружности радиуса M до пересечения в первом случае с большой стороной засечки, а во втором — с малой, получаем точки c и b. Соединив точки a и b, b и c, c и d и восстановив в середине отрезков ab, bc и cd перпендикуляры, в пересечении их найдем точку O. Из этой точки как из центра проводим дугу окружности $abcd$.

Проводя через P и O прямую, получим направление большой оси, а перпендикулярным ей будет направление малой оси. Точки *3* и *4* можно найти, проведя из точки *1* как из центра дуги окружности радиуса M до пересечения с малой осью подеры. Соединив плавными кривыми точки *3* и *4* с a и d, имеем правую часть подеры.

Левую часть подеры нетрудно построить, отложив на большой оси отрезок $PO_1=PO$. Точка O_1 является центром окружности левой части подеры.

Когда угол засечки тупой (рис. 2, *б*), необходимо на продолжении большей стороны найти точку T_2' на расстоянии S_2 от точки P, а затем все построения выполнить по приведенной методике.

Если угол засечки равен 90°, а $S_1=S_2$, подера обращается в окружность с центром в точке P и радиусом, равным $\frac{m_\alpha S_1}{\rho}$. При $\gamma=90°$, а $S_1<S_2$, большая часть подеры совпадает с направлением меньшей стороны засечки, причем большая полуось $A_0=\frac{m_\alpha S_2}{\rho}$, малая полуось $B_0=\frac{m_\alpha S_1}{\rho}$.

Предлагаемый способ может значительно упростить оценку точности многократной прямой засечки (при любом количестве направлений). При этом представится возможность получать максимум информации о погрешности положения вставляемой точки и решать вопрос о наилучшем варианте вставки при ее проектировании. Покажем это на примере, который взят из работы [2].

Здесь для определения координат точки P (рис. 3) были использованы четыре направления засечки при следующих данных: $\alpha_1=321°$, $\alpha_2=291°$, $\alpha_3=193°$, $\alpha_4=154°$, $S_1=1800$ м, $S_2=1500$ м, $S_3=1200$ м, $S_4=1250$ м, средняя квадратическая ошибка направления $\pm 3''$.

Порядок построения подеры многократной прямой засечки следующий. Откладываем от оси x значения дирекционных углов и проводим направления засечки *1*, *2*, *3* и *4*. Многократную засечку можно рассматривать как состоящую из отдельных простых засечек. По приведенной выше методике строим подеры простых засечек, а именно: (1—P—2), (2—P—3) и (3—P—4). Обработка математических моделей засечек показала, что результирующая подера многократной засечки располагается внутри фигуры, площадь которой является общей для подер простых засечек, составляющих многократную.

В нашем примере a, b, c, d, e, f являются точками подеры (1—2—3—4) многократной засечки. Для построения этой подеры соединяем a с b и f, восстанавливаем из середины отрезков ab и af перпендикуляры, в пересечении которых получаем центр одной части подеры. Построение другой части подеры не представит трудности. Отметим, что точки b и e принадлежат подере (1—P—2), точки c и f — подере (3—P—4), точки a и d — точки подеры (2—P—3) в местах ее пересечения с линиями крайних положений, параллельных самой короткой стороне засечки.

Произведя оценку точности графическим способом, мы получили следующие результаты в миллиметрах (см. таблицу).

В таблице также показаны данные, полученные проф. Ф. Ф. Павловым [2] и для сравнения приведены результаты аналитических расчетов по формулам (2) и (3).

Из таблицы видно, что расхождение результатов, полученных графически и аналитически, незначительно и находится в пределах точности построения подер. Кроме того, отметим, что

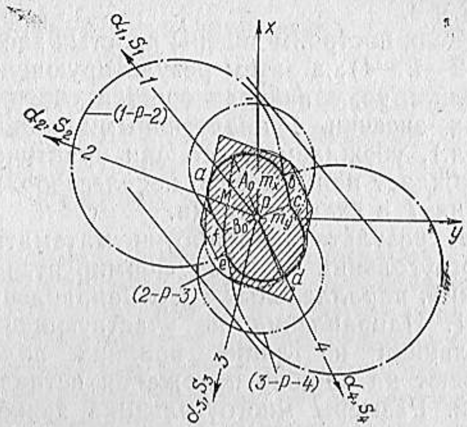

Рис. 3. Порядок построения подеры многократной угловой засечки.

достоинство предлагаемого способа по сравнению со способами, описанными в работах [1, 2], состоит в том, что нет необходимости строить инверсионную фигуру и инверсионный квадратический полигон, не нужно вычислять площади инверсионных треугольников и выполнять аналитические расчеты для того, чтобы построить результирующую подеру.

Результаты оценки точности прямой угловой засечки графическим и аналитическим способами

Подера	Графический способ						Аналитический способ			
	A_0	B_0	m_x	m_y	M	φ_{0_1}	A_0	B_0	M	φ_{0_1}
(1—P—2)	65,5	17,0	39,0	56,0	67,8	123°00′	66,2	17,3	68,4	123°01′
(2—P—3)	23,0	16,5	22,8	16,7	28,0	358°20′	21,5	18,4	28,9	0°55′
(3—P—4)	38,0	13,5	38,0	14,7	40,3	175°00′	37,8	13,4	40,2	174°26′
(2—P—4)	39,0	15,0	30,0	29,8	41,8	137°10′	38,9	15,0	41,7	137°16′
(1—2—3—4)	21,8	11,0	20,0	13,5	24,0	156°00′	20,7	11,5	23,6	156°38′
(2—3—4)	21,9	13,0	21,0	14,0	25,3	160°40′	21,3	12,7	23,8	162°04′
По [2]	20,8	10,4	18,7	13,6	23,1	156°50′				

Как показано на рис. 3, подера многократной засечки расположена внутри многоугольника, который формируют линии крайних положений точки P. Эти линии параллельны сторонам засечки и отстоят от них на величину поперечного смещения $\frac{m_\alpha S_i}{\rho}$.

В нашем примере (рис. 3) этот многоугольник образуют лишь линии, параллельные сторонам *2*, *3* и *4*, засечки. Линии, параллельные стороне *1*, не участвуют в формировании данного многоугольника. Это говорит о том, что включение направления *1* в схему засечки не повышает точности определения точки P по сравнению со схемой, состоящей всего из трех направлений *2*, *3* и *4*.

Если построим подеры простых засечек ($2—P—3$), ($3—P—4$) и ($2—P—4$), а затем результирующую подеру (2—3—4) такой засечки, то, сравнивая ошибки точки P при четырех направлениях засечки с аналогичными при трех направлениях (см. табл.), убеждаемся, что они практически одинаковы. Это подтверждает наш вывод о нецелесообразности включения направления *1* в схему засечки.

В результате обработки математических моделей засечек, многоугольник которых формируется из линий крайних положений, параллельных трем направлениям засечки, установлено:

1. Направления, не участвующие в формировании многоугольника из линий крайних положений, существенно не влияют на ошибку положения вставляемой точки.

2. Размеры многоугольника зависят от ошибок измерения углов, от схемы засечки и длин ее сторон. Чем эти размеры меньше, тем положение засекаемой точки определяется точнее.

3. Подера многократной засечки ориентируется примерно по длинной диагонали многоугольника и касается линий крайних положений (точки a и d), параллельных самой короткой стороне засечки (при равноточном измерении углов).

Эти выводы и предлагаемая методика построения подер могут быть использованы при проектировании вставки точки прямой угловой засечкой, при решении вопроса о наилучшем варианте засечки и при оценке ее точности.

Список литературы: 1. *Келль Н. Г.* Графический метод в действиях с погрешностями и положениями. М., Изд-во АН СССР, 1948. 2. *Павлов Ф. Ф.* Предвычисление погрешностей в основных маркшейдерских работах. М., Углетехиздат, 1950.

Работа поступила в редколлегию 12 апреля 1976 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Горьковского инженерно-строительного института.