УДК 528.2:531.28

В. Ф. ЕРЕМЕЕВ, М. И. ЮРКИНА

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА В СВЯЗИ С ТЕОРИЕЙ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Некоторые задачи теории фигуры Земли приводят к интегральному уравнению типа Фредгольма первого рода [1, 5].

Применив для решения этого уравнения метод разложения по степеням параметра k [4], И. Ф. Монин свел задачу к решению следующего уравнения на сфере:

$$\int \frac{v}{r} d\sigma = t, \tag{1}$$

где r — расстояние между точками сферы;
t — заданная на сфере функция;
v — искомая.

Функция v имеет смысл плотности простого слоя, функция t — потенциала этого слоя. При вычислении потенциала по плотности мы можем искать значение потенциала как внешнее предельное. Значения функции v должны быть найдены на сфере σ.

При решении уравнения (1) И. Ф. Монин использовал два ряда

$$\sum_{0}^{\infty} (2n+1)^2 P_n(\cos\psi)$$

и

$$\sum_{0}^{\infty} (2n+1)(n+1) P_n(\cos\psi),$$

коэффициенты C_n которых не удовлетворяют необходимому критерию сходимости разложений по ортогональным функциям.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 < \infty. \tag{2}$$

Поэтому сомнительная правильность решения Мониным уравнения (1) в виде

$$v = -\frac{1}{4\pi^2} \int (t - \overline{t}) \frac{d\sigma}{r^3} + \frac{\overline{t}}{4\pi R}, \tag{3}$$

где $\overline{t}$ — значение функции t в фиксированной точке.

При некоторых ограничениях свойств функции t правильность решения (3) уравнения (1) можно показать путем, отличным от выбранного Мониным. Допустим, прежде всего, возможность представления функции t сходящимся разложением по сферическим функциям. Приняв некоторую фиксированную точку P сферы за полюс, значения функции t в текущей точке M сферы можно представить в виде

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\psi) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_{nk}\cos k\alpha + b_{nk}\sin k\alpha)P_n^k(\cos\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n. \tag{4}$$

Здесь ψ — угловое расстояние между точками P и M; α — азимут точки M, отсчитываемый при P от некоторого фиксированного направления. Значение $\overline{t}$ функции t в точке P равно

$$\overline{t} = \sum_{0}^{\infty} a_n,$$

и для точки P можно вычислить

$$i = \int \frac{t-\overline{t}}{r^3}\,d\sigma = R^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3}(t-\overline{t})\sin\psi\,d\psi\,d\alpha. \tag{5}$$

сть определения интеграла i требует большего ограничения функции t, чем указанное. А именно, функция t должна иметь на сфере равномерно непрерывную производную. Интеграл i не существует, например, для функций, имеющих особые точки типа вершин конуса с прямолинейной образующей (в этих особых точках интеграл i не ограничен).

Подставив первый член разложения (4) в (5) и положив $\cos\psi = \mu$, получим

$$i = \int \frac{t-\overline{t}}{r^3}\,d\sigma = \frac{\pi\sqrt{2}}{2R}\lim_{\varepsilon\to 1}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(P_n-1)\,d\mu}{(1-\mu)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{2R}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{\varepsilon\to 1}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{P_n-1}{(1-\mu)^{3/2}}\,d\mu.$$

Результат подстановки второго члена разложения (4) в (5) условно сводится к нулю.

Интегрированием по частям найдем

$$\lim_{\varepsilon\to 1}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{P_n-1}{(1-\mu)^{3/2}}\,d\mu = \lim_{\varepsilon\to 1}\left\{\frac{2(P_n-1)}{(1-\mu)^{1/2}}\Big|_{-1}^{\varepsilon} - 2\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dP_n}{d\mu}\frac{d\mu}{(1-\mu)^{1/2}}\right. . \tag{6}$$

Верхний предел первого члена в фигурных скобках равен нулю. Если n — число четное, то равен нулю и нижний предел этого члена. При нечетном n

$$\frac{2(P_n-1)}{(1-\mu)^{1/2}}\Big|_{-1} = 2\sqrt{2}.$$

При вычислении второго члена в фигурных скобках в формуле (6) будем иметь в виду [2. стр. 37 и 38], что при четном n

$$\frac{dP_n}{d\mu} = (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5} + \cdots + 3P_1$$

и при нечетном n

$$\frac{dP_n}{d\mu} = (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5} + \cdots + 5P_2 + P_0.$$

Будем также иметь в виду табличный определенный интеграл [3, стр. 835].

$$\int_{-1}^{\varepsilon} (\varepsilon - \mu)^{-\frac{1}{2}} P_n(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1}(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}[T_n(\varepsilon) + T_{n+1}(\varepsilon)],$$

где T — полином Чебышева первого рода,

$$\lim_{\varepsilon \to 1} T_n(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 1} T_{n+1}(\varepsilon) = 1.$$

С помощью указанных соотношений при четных n находим

$$\lim_{\varepsilon \to 1} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dP_n}{d\mu} \frac{d\mu}{(1-\mu)^{1/2}} = \sqrt{2} \cdot n$$

и при нечетных n

$$\lim_{\varepsilon \to 1} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dP_n}{d\mu} \frac{d\mu}{(1-\mu)^{1/2}} = \sqrt{2}\,(n+1).$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \to 1} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{P_n - 1}{(1-\mu)^{3/2}}\, d\mu = -2\sqrt{2}\, n$$

при четных и нечетных значениях n.

А следовательно,

$$i = -\frac{2\pi}{R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n n. \tag{7}$$

Интеграл i можно вычислить также другим путем, воспользовавшись таким представлением многочлена Лежандра [2, стр. 25]

$$P_n(\cos\psi) = 1 - \frac{(n+1)n}{1^2} \sin^2 \frac{\psi}{2} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2 \cdot 2^2} \sin^4 \frac{\psi}{2} - \cdots$$

Подставив разложение (4) в (5), в этом случае получим

$$i = \frac{\pi}{R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{\varepsilon \to 1} \int_0^{\varepsilon} \left[-\frac{(n+1)n}{1^2} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2 \cdot 2^2} z^2 - \cdots \right] dz =$$

$$=\frac{\pi}{R}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[-\frac{(n+1)n}{1^2\cdot 1}+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3}-\cdots\right]=$$

$$=-\frac{2\pi}{R}\sum_{n=0}^{\infty}a_n n.$$

Чтобы вычислить сумму S_n членов, число которых равно n, многочлена в квадратных скобках, приведем следующие зависимости:

$$S_n=-\frac{(n+1)n}{1^2\cdot 1}+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3}-$$

$$-\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 5}+\cdots+(-1)^n\times$$

$$\times\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots n^2\cdot(2n-1)},$$

$$S_{n-1}=-\frac{n(n-1)}{1^2\cdot 1}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3}-$$

$$-\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 5}+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2(n-1)(2n-3)(2n-4)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots(n-1)^2\cdot(2n-3)},$$

$$S_n+S_{n-1}=-\frac{2n\cdot n}{1^2\cdot 1}+\frac{2n(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3}-$$

$$-\frac{2n(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 5}+\cdots$$

$$+\cdots(-1)^n\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots n^2(2n-1)},$$

$$S_n-S_{n-1}=-\frac{2}{1}\cdot\frac{n}{1^2}+\frac{4}{3}\,\frac{(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2}-$$

$$-\frac{6}{5}\,\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\cdots$$

$$+\cdots(-1)^n\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots n^2}.$$

Подставив в приведенное выше выражение многочлена Лежандра $\psi=\pi$, устанавливаем

$$\Phi_n=-\frac{(n+1)n}{1^2}+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2\cdot 2^2}-$$

$$-\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots n^2},$$

$$\Phi_{n-1} = -\frac{n(n-1)}{1^2} + \frac{(n+1)\,n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2} - \\ - \frac{(n+2)(n+1)\,n(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2} + \cdots$$

при n четном $\Phi_n = 0$, $\Phi_{n-1} = -2$, при n нечетном $\Phi_n = -2$, $\Phi_{n-1} = 0$, поэтому

$$\Phi_n + \Phi_{n-1} = -2.$$

Таким образом,

$$\Phi_n + \Phi_{n-1} = -\frac{2n\cdot n}{1^2} + \frac{2n(n+1)\,n(n-1)}{1^2\cdot 2^2} - \\ - \frac{2n(n+2)(n+1)\,n(n-1)(n-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2} + \\ + \cdots (-1)^n \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots n^2} = -2$$

при любых целых значениях n, кроме $n \leqslant 0$.

Умножим теперь $S_n - S_{n-1}$ на $2n$, затем вычтем из полученного произведения сумму $\Phi_n + \Phi_{n-1}$. В результате получим числовой ряд, совпадающий с $S_n + S_{n-1}$, то есть

$$S_n + S_{n-1} = 2n(S_n - S_{n-1}) - (\Phi_n + \Phi_{n-1}) = 2n(S_n - S_{n-1}) + 2.$$

Решив это уравнение относительно S_n, найдем рекуррентное соотношение

$$(2n-1)\,S_n = (2n+1)\,S_{n-1} - 2.$$

Следовательно, если известно, что

$$S_{n-1} = -2(n-1),$$

то

$$S_n = -2n.$$

Итак, должно быть

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n n\right| < \infty. \tag{8}$$

Эквивалентность требования о существовании равномерно непрерывной производной функции t и условия (8) нуждается в выяснении. Возможно, условие (8) сильнее.

Следовательно, для точки P

$$v = \frac{1}{2\pi R}\sum_{n=0}^{\infty} a_n n + \frac{1}{4\pi R}\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Коэффициенты разложения функции t по сферическим функциям относительно полюса и начального меридиана общей сферической системы координат (полярных расстояний ϑ и долгот λ) имеют вид

$$A_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\,P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda,$$

$$A_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t P_n^k (\cos \vartheta) \cos k \lambda \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda,$$

$$B_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t P_n^k (\cos \vartheta) \sin k\lambda \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda.$$

Поэтому

$$a_n = \frac{2n+1}{4\pi R^2} \int t P_n (\cos \psi) \, d\sigma = A_n P_n (\cos \vartheta_p) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (A_{nk} \cos k\lambda_p + B_{nk} \sin k\lambda_p) P_n^k (\cos \vartheta_p). \tag{9}$$

Для некоторой другой фиксированной точки Q имеем, считая точку P текущей,

$$t = \int \frac{v}{r} \, d\sigma = \int \lim_{\rho \to R} \sum_{0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} \Bigg[P_n (\cos \vartheta_p) \, P_n (\cos \vartheta_Q) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k (\cos \vartheta_p) \, P_n^k (\cos \vartheta_Q) \cos k (\lambda_Q - \lambda_p) \Bigg] \times$$

$$\times \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \Bigg[A_n P_n (\cos \vartheta_p) + \sum_{k=1} (A_{nk} \cos k\lambda_p + B_{nk} \sin k\lambda_p) \, P_n^k (\cos \vartheta_p) \Bigg] d\sigma =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n R_n (\cos \vartheta_Q) + \sum_{k=1}^{n} (A_{nk} \cos k\lambda_Q + B_{nk} \sin k\lambda_Q) \, P_n^k (\cos \vartheta_Q)) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n,$$

что и показывает правильность решения при сделанных допущениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бровар В. В. Фундаментальные гармонические функции с особенностью на отрезке и решение внешних краевых задач. Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка, 1964, № 3, 51—61.

2. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.

3. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4-е. Гос. изд-во физ.-мат. литературы, М., 1963.

4. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, 1960, № 131.

5. Монин И. Ф. Об определении фигуры и внешнего гравитационного поля Земли. Межведомств. республ. научно-техн. сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1965, № 2, 24—30.

Работа поступила
27 мая 1968 года.