РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 18

УДК 528.22:531.26

М. И. МАРЫЧ, И. Н. ГУДЗ, П. Д. ДВУЛИТ

ОПЫТ ВЫЧИСЛЕНИЯ УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСА НА МОДЕЛЯХ ЗЕМЛИ

В настоящее время уже получены формулы, позволяющие вычислять уклонения отвеса в горном районе. Эти формулы эквивалентны формулам первого приближения Молоденского, но в них вместо поправок G_1 к измеренным аномалиям силы тяжести фигурируют вычисляемые вертикальные градиенты этих аномалий.

Составляющая уклонения отвеса в плоскости меридиана определяется выражением [1, 2]

$$\xi'' = -\frac{1}{2\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\Delta g - \left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 H\right] Q(\psi)\cos A\, d\psi\, dA - \frac{\rho'' H_0}{\gamma}\frac{d\Delta g}{dl}. \quad (1)$$

Первый интегральный член данного выражения, содержащий измеренные аномалии силы тяжести Δg, представляет собой обычную формулу Венинг-Мейнеса, по которой находят нулевые или стоксово приближение ξ_0 уклонения отвеса. Остальные члены этой формулы

$$\xi_1'' = \frac{1}{2\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 HQ(\psi)\cos A\, d\psi\, dA - \frac{\rho'' H_0}{\gamma}\frac{d\Delta g}{dl}, \quad (2)$$

дают первую поправку Молоденского к ξ_0. Здесь

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R}\int\frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^3}\, d\sigma \quad (3)$$

вертикальный градиент силы тяжести, определяемый по формуле Нумерова, в которой $r = 2\sin\frac{\psi}{2}$, Δg_0 — значение аномалии силы тяжести в исследуемой точке, $d\sigma$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса. Входящую в последний член формул (1) и (2) величину $\frac{d\Delta g}{dl}$ можно найти на карте по значениям Δg двух точек, близких к исследуемой и расположенных на меридиане последней на расстоянии dl; H — высота рельефа Земли, H_0 — значение в исследуемой точке.

В нашей работе согласно формуле (2) выполнены вычисления уклонения отвеса для моделей Земли по построенным для них гравиметрическим картам. В качестве моделей использованы две модели В. Ф. Еремеева, хорошо аппроксимирующие рельеф и гравитационное поле горного района. Первая модель [4] представляет собой конус, высота которого над отсчетной плоскостью (основание конуса) 4,1 *км*, радиус основания — 24,6 *км*. На расстоянии 0,6 *км* от оси конуса поверхность последнего переходит в параболоид, вершина которого на 50 *м* ниже вершины конуса. За аномальные массы приняты две материальные точки, расположенные на оси конуса; первая из них находится над отсчетной плоскостью на высоте 2 *км*, вторая расположена ниже этой плоскости на глубине 4 *км*. Аномалии силы тяжести, в качестве которых приняты вертикальные составляющие притяжения аномальных масс на вершине горы, соответственно равны 100 и 150 *мгал*.

Во второй модели [7] в отличие от первой высоты H определяются по формуле

$$H = H_0\left[1-\left(\frac{l}{l_c}\right)^2\right]^2,$$

где H_0 — высота вершины модели, равная 4 *км*, l — расстояние точек поверхности модели от ее оси вращения, l_c — значение l для плоскости отсчета ($H=0$).

Вычисления ξ_1 выполнялись хорошо испытанным методом ЦНИИГАиК с использованием палеток Еремеева для определений уклонений отвеса по формулам Венинг-Мейнеса. Для нахождения вертикальных градиентов аномалии силы тяжести в стоксовом приближении (3) использована следующая рабочая формула [5]:

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{R_i}-\frac{1}{R_{i-1}}\right)\delta g, \tag{4}$$

где R_i — радиусы колец палетки, δg — разности осередненных значений аномалий силы тяжести по кольцам палетки и значения аномалий в исследуемой точке. При определении влияния центральной зоны от 0 до 5 *км* градиенты вычислялись в точках пересечения пяти колец палетки с ее радиусами; при учете влияния ближней зоны от 5 *км* до 100 *км* градиенты определялись для точек, совпадающих с центрами трапеций палетки. При этом оказалось, что в ближней зоне достаточно ограничиться радиусом порядка 30 *км*.

Высоты H рельефа Земли, входящие в формулы (1) или (2), могут быть увеличены или уменьшены на одинаковую постоянную величину, причем и так, чтобы отсчетная сфера проходила через исследуемую точку. От этого результат не изменится [3]. Если принять, что высота H_0 в исследуемой точке равна нулю, то есть отсчетная сфера проходит через исследуемую точку, то формула (1) приводится к формуле Арнольда [6]. В этом случае равенство (2) примет вид

$$\xi_1'' = \frac{1}{2\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0(H-H_0)\right]Q(\psi)\cos A\,d\psi\,dA. \tag{5}$$

Сопоставляя (2) и (5), видим, что

$$\frac{\rho''\,d\Delta g}{dl} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 Q(\psi)\cos A\,d\psi\,dA. \tag{6}$$

Таким образом, величина $\frac{d\Delta g}{dl}$, найденная по гравиметрической карте, должна быть равной ее значению, вычисленному по формуле (6). Это в известной степени контролирует надежность определения градиентов по формуле (4).

Таблица 1

Результаты вычислений уклонений отвеса в первом приближении Молоденского для модели 1

№ точек	l, км	H_0, км	Точное значение ξ''	По Молоденскому						По Арнольду			По формуле (2)		
				ξ''_0	ξ''_1	$\xi''_ц$	$\xi''_б$	$\xi''_н$	ξ''_1	$\xi''_ц$	$\xi''_б$	ξ''_1	$G_в, \frac{с}{м}$	$G, \frac{с}{м}$	ξ''_1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,6	4,0	+ 8,21	+ 6,72	+1,79	−6,25	0,00	+8,51	+2,26	+1,31	0,00	+1,31	+5,05	+4,84	+1,26
2	2,4	3,7	+17,20	+15,53	+2,00	−3,99	0,00	+5,97	+1,98	+1,77	−0,05	+1,72	+6,92	+7,16	+1,79
3	9,6	2,5	+13,56	+12,13	+1,30	+2,02	0,00	+1,42	+1,44	−0,12	+1,18	+1,06	+1,50	+1,89	+1,34

Таблица 2

Результаты вычислений уклонений отвеса в первом приближении Молоденского для модели 2

№ точек	l, км	H_0, км	Точное значение, ξ''	По Молоденскому		По Арнольду			По формуле (2)		
				ξ''_0	ξ''_1	$\xi''_ц$	$\xi''_б$	ξ''_1	$G_б, \frac{с}{м}$	$G, \frac{с}{м}$	ξ''_1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,0	3,9	+11,98	+10,61	+1,43	+1,76	−0,28	+1,48	+9,23	+8,66	+1,39
2	3,0	3,5	+18,09	+14,92	+3,28	+3,77	−0,67	+3.20	+5,00	+5,04	+3,23
3	10,0	0,4	+16,35	+12,36	+3,69	+0.37	+3,97	+4,34	+2,14	+1,97	+3,99

Основные результаты вычислений, полученные для первой и второй моделей Еремеева, приведены соответственно в табл. 1 и 2. Величины $\frac{\rho''}{\gamma}\frac{d\Delta g}{dl}$, фигурирующие в формуле (2), были определены дважды: G — по карте и $G_в$ — по формуле (6); их значения даны соответственно в столбцах 15 и 14 табл. 1 и 11 и 10 табл. 2. В соответствии с этим были получены значения поправки ξ_1. В таблицах приведены результаты, соответствующие второму случаю (столбцы 13 и 9). Они совпадают с результатами, получаемыми по формулам Арнольда (5). В столбце 6 табл. 1 и столбце 6 табл. 2 даны результаты вычислений В. Ф. Еремеева по формулам Молоденского; эти результаты приняты нами за точные, так как были найдены аналитически и, следовательно, с большей точностью. Сопоставление наших результатов (столбцы 13 табл. 1 и 9 табл. 2) с точными показывают, что они отличаются от последних на величины порядка нескольких десятых секунд. При этом величины ξ_1, вычисленные для первого случая $\left(\frac{d\Delta g}{dl}\text{ находится по карте}\right)$, при больших высотах H_0 менее точны. Но так как с целью контроля вычисления градиентов по формуле (4) величины $\frac{\rho''\, d\Delta g}{\gamma dl}$ должны быть найдены дважды — по формуле (6) и по карте, то при вычислениях ξ_1 по (2) всегда можно воспользоваться вычисленным значением этой величины, в результате чего не будет потеряна точность вычисления ξ_1.

Если найденные по формуле (4) значения градиентов пропорциональны искомым их значениям, то величины G и $G_в$, помещенные соответственно в столбцах 15, 14 табл. 1 и 11 и 10 табл. 2, позволяют улучшить найденные по формулам (2) и (5) величины ξ_1. Для этого следует только вычисленное значение ξ_1 умножить на величину $\frac{G}{G_в}$. Такие результаты приведены в таблицах (столбцы 16 и 12).

Этим же методом были найдены поправки ξ_1 для первой модели согласно первому приближению формул Молоденского [4]. Поправки G_1 к аномалиям силы тяжести, фигурирующие в названной формуле, были взяты из [4]. Результаты этих вычислений даны в табл. 1, столбец 10. В столбцах 7, 8, 9 приведены соответственно значения поправки ξ_1 за влияние центральной зоны от 0 до 5 *км*, за влияние ближней зоны и поправок за наклон физической поверхности Земли в данной точке. Отдельные значения поправки ξ_1 за влияние центральной и ближней зон, соответствующие вычислениям по формуле (2), помещены в столбцах 11 и 12 табл. 1. Полученные в обоих случаях результаты показывают, что для первой и второй точек основную часть поправки ξ_1 дает учет центральной зоны. Для третьей точки влияние центральной зоны незначительное; здесь основную часть поправки дает учет ближней зоны. По формуле Молоденского искомая поправка оказалась равной поправке за наклон (столбец 9 табл. 1)*. Аналогичные результаты получены и для второй модели. Это соответствует выводу В. Ф. Еремеева, что при вычислении по формуле Арнольда основную часть поправки дает не центральная зона, а ближайшая [7]. Однако нам представляется, что для вычислений поправки ξ_1 указанным методом по формулам (2) или (5) можно пользоваться той же гравиметрической картой, которой пользуются при вычислении стоксова приближения ξ_0, и нет необходимости дополнительно уточнять ее вне центральной зоны.

---

* В соответствии с дипломным заданием студент В. И. Муха выполнил вычисления, результаты которых близки к нашим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марыч М. И. Об определении отклонений отвеса на физической поверхности Земли. — В сб.: Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 3. Изд-во Львовского ун-та, 1965.

2. Марыч М. И. Приведение формулы В. В. Бровара, определяющей фигуру Земли, к ряду Тейлора. — В сб.: Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 6. Изд-во Львовского ун-та, 1967.

3. Марыч М. И. О втором приближении М. С. Молоденского для возмущающего потенциала. — В сб.: Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 10. Изд-во Львовского ун-та, 1969.

4. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 131, М., Геодезиздат, 1960.

5. Сажина Н. Б., Грушинский Н. П. Гравитационная разведка. М., «Недра», 1966.

6. Arnold K. The boundary-value problem of physical geodesy and its Solution. Studia geophysica et geodaetica, 1965, 9, № 2.

7. Yeremeev V. F. An Investigation of some Methods of calculating plumb-line deflections on an Earth Model. Studia geophysica et geodaetica, 1970, 14, № 2.

Работа поступила в редколлегию 17 мая 1972 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и гравиметрии Львовского политехнического института.