

Л. К. ВОЙСЛАВСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЦИФРОВАЯ МОДЕЛЬ РЕЛЬЕФА

Одной из задач, решаемой при цифровом моделировании рельефа, является интерполяция высот [10]. Для цифровых моделей рельефа (ЦМР) с регулярным расположением точек в узлах сетки квадратов наиболее приемлемы билинейная или бикубическая интерполяции [1, 2]. Билинейная интерполяция проста, наглядна и обеспечивает гладкую непрерывность моделируемой поверхности на сторонах сетки квадратов. Однако она недостаточно точно аппроксимирует рельеф местности внутри квадрата. Бикубическая интерполяция более точно отображает рельеф, но она очень громоздка.

В настоящей работе рассматривается ЦМР, которая, обладая почти теми же достоинствами, что и билинейная, не только значительно точнее аппроксимирует поверхность, но и позволяет довольно просто решать широкий круг топографических и прикладных задач. Главная особенность этой модели, на наш взгляд, состоит в том, что здесь используется такая важная характеристика поверхности, как уклон.

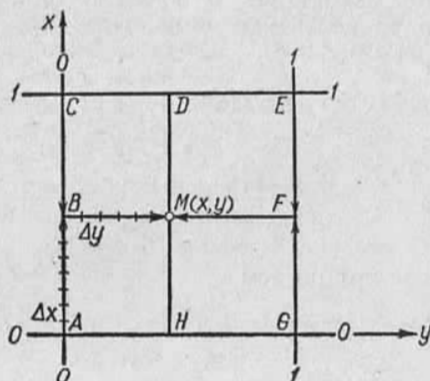


Рис. 1. Геометрическая схема интерполяции высот внутри квадрата.

Уклон поверхности в заданной точке и некотором фиксированном направлении α не что иное, как частная производная от высоты точки по расстоянию в этом же направлении [3], т. е.

$$i(\alpha) = \frac{\partial H}{\partial L_\alpha}. \quad (1)$$

Поэтому для узлов сетки квадратов (рис. 1) уклон поверхности по осям координат можно определить численным дифференцированием [5]

$$\begin{aligned} i(x)_{jk} &= \\ &= \frac{(H_{j+1,k-1} + 2H_{j+1,k} + H_{j+1,k+1}) - (H_{j-1,k-1} + 2H_{j-1,k} + H_{j-1,k+1})}{8d}, \\ i(y)_{jk} &= \\ &= \frac{(H_{j+1,k-1} + 2H_{j,k-1} + H_{j-1,k-1}) - (H_{j+1,k+1} + 2H_{j,k+1} + H_{j-1,k+1})}{8d}, \quad (2) \end{aligned}$$

где H — отметки точек в узлах сетки квадратов; d — шаг сетки.

Поскольку дифференцирование в (2) выполняется между точками, расположенными на расстоянии $2d$, значения уклонов в вершинах квадратов, вычисленные по этим формулам, весьма приближенные. Но, несмотря на это, они дают ценную информацию для моделирования рельефа.

В дальнейшем условимся:

1. Каждая ячейка сетки имеет свою собственную систему прямоугольных координат (x, y) , начало которой находится в ее юго-западном (нижнем левом) углу;

2. За единицу длины принимается отрезок d , т. е. координаты любой точки в данной ячейке могут принимать значения в интервале от 0 до 1.

Уклоны по осям координат в произвольной точке квадрата $M(x, y)$ можно определить как весовое среднее уклонов его вершин, полученное из (2),

$$i(x) = \frac{p_{00} i(x)_{00} + p_{10} i(x)_{10} + p_{01} i(x)_{01} + p_{11} i(x)_{11}}{p_{00} + p_{10} + p_{01} + p_{11}},$$

$$i(y) = \frac{p_{00} i(y)_{00} + p_{10} i(y)_{10} + p_{01} i(y)_{01} + p_{11} i(y)_{11}}{p_{00} + p_{10} + p_{01} + p_{11}}. \quad (3)$$

В качестве весов принимаем

$$p_{00} = (1-x)(1-y), \quad p_{10} = x(1-y),$$

$$p_{01} = (1-x)y, \quad p_{11} = xy. \quad (4)$$

Геометрически веса (4) представляют собой площади прямоугольников $MDEF$, $MEGH$, $BCDM$, $ABMH$, представленных на рис. 1 [9]. Очевидно, сумма весов равна единице.

Подставив (4) в (3) и выполнив необходимые алгебраические преобразования, имеем уравнения поверхностей

$$i(x) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy,$$

$$i(y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy, \quad (5)$$

где

$$a_1 = i(x)_{00}, \quad a_2 = i(x)_{10} - i(x)_{00},$$

$$a_3 = i(x)_{01} - i(x)_{00}, \quad a_4 = i(x)_{00} + i(x)_{11} - i(x)_{01} - i(x)_{10},$$

$$b_1 = i(y)_{00}, \quad b_2 = i(y)_{10} - i(y)_{00},$$

$$b_3 = i(y)_{01} - i(y)_{00}, \quad b_4 = i(y)_{00} + i(y)_{11} - i(y)_{01} - i(y)_{10}. \quad (5a)$$

Поверхности (5) гладкие, т. е. переход от одного квадрата к другому происходит плавно, без разрывов по линиям сетки.

Если речь идет об интерполяции высот, нужно отметить, что как в топографии вообще, так и в ЦМР, в частности, мы встречаемся с двумя видами интерполяционных задач:

определение высоты в заданной точке;

определение точки с заданной высотой.

Последнюю задачу приходится решать, например, при проведении горизонталей. Представляется целесообразным именовать их соответственно прямой и обратной интерполяционными задачами.

Прямая интерполяционная задача. Попытаемся определить отметку точки M по известным отметкам вершин квадрата, которые обозначим $H_{00}, H_{01}, H_{10}, H_{11}$. Разобьем линии AB и BM на очень малые отрезки Δx и Δy . Тогда для высоты точки M запишем выражение

$$H(s, t)_{00} = H_{00} + \sum_0^s i(x)_j \Delta x_j + \sum_0^t i(y)_k \Delta y_k, \quad (6)$$

где значения функций $i(x)_j, i(y)_k$ отнесены к середине j и k отрезков;

$$s = xd, \quad t = yd \quad (7)$$

координаты точки M в метрических единицах.

Полагая $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ и переходя в (6) к пределам сумм, получаем

$$H(s, t)_{00} = H_{00} + \int_0^s i(x) dx + \int_0^t i(y) dy. \quad (8a)$$

Аналогично (направления показаны на рис. 1 стрелками) запишем

$$\begin{aligned} H(s, t)_{01} &= H_{01} + \int_0^s i(x) dx + \int_d^t i(y) dy, \\ H(s, t)_{10} &= H_{10} + \int_d^s i(x) dx + \int_0^t i(y) dy, \\ H(s, t)_{11} &= H_{11} + \int_d^s i(x) dx + \int_d^t i(y) dy. \end{aligned} \quad (8б)$$

Ранее было отмечено, что уклоны, вычисленные по (2), приближенные. Следовательно, приближенными будут и полученные на их основе (5). Вот почему каждое из выражений (8) даст нам свое, несколько отличное от других, значение отметки точки M . Оптимальным решением в создавшейся ситуации будет, по-видимому, определение средней весовой величины.

Подставим в (8) вместо $i(x)$ и $i(y)$ их значения из (5). Полученные выражения проинтегрируем, умножим на веса (4) и просуммируем. В найденную сумму вместо s и t подставим их значения из (7) и выполним все необходимые алгебраические преобразования. В результате получим интерполяционную формулу

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \{H_{00}(1-x)(1-y) + H_{01}(1-x)y + H_{10}x(1-y) + \\ &+ H_{11}xy\} - \frac{d}{2} \{a_2 x(1-x) + a_4 x(1-x)y^2 + b_3 y(1-y) + \\ &+ b_4 xy(1-y)\}. \end{aligned} \quad (9)$$

В правой части (9) первая сумма в фигурных скобках представляет формулу билинейной интерполяции [2], а вторая учитывает влияние уклонов поверхности. Таким образом, полученная нами модель не только не противоречит билинейной, но и является ее дальнейшим развитием.

Так как в основе интерполяционной модели (9) лежит численное дифференцирование поверхности, целесообразно назвать ее дифференциальной ЦМР.

Сравнительные показатели точности аппроксимации рельефа

Сторона квадрата, м	Показатели	Участки					
		1	2	3	4	5	6
40 — 289	m_1	0,11	0,10	0,13	0,05	0,09	0,10
	m_2	0,07	0,08	0,09	0,04	0,06	0,07
	F	2,20	1,50	1,96	1,57	1,87	2,06
60 — 256	m_1	0,17	0,14	0,23	0,07	0,12	0,17
	m_2	0,12	0,11	0,16	0,05	0,10	0,11
	F	2,03	1,63	2,07	2,16	1,69	2,49
80 — 289	m_1	0,22	0,18	0,32	0,09	0,17	0,17
	m_2	0,16	0,14	0,24	0,06	0,13	0,13
	F	1,92	1,92	1,75	2,56	1,47	1,69
100 — 256	m_1	0,35	0,22	0,29	0,14	0,16	0,24
	m_2	0,27	0,14	0,26	0,07	0,14	0,18
	F	1,65	2,44	1,33	4,00	1,38	1,87

Примечание. В таблице приняты следующие обозначения: m_1 , m_2 — средние квадратические погрешности (м) аппроксимации рельефа билинейной и дифференциальной интерполяциями соответственно; $F = m_2^2 : m_1^2$ — критерий Фишера для проверки гипотезы о равенстве дисперсий.

Прежде чем говорить о достоинствах интерполяционной модели (9) и ее возможных практических приложениях, необходимо установить, насколько точно смоделированная ею поверхность отображает рельеф местности. Чтобы ответить на поставленный вопрос, проведено экспериментальное исследование. Для постановки эксперимента использованы производственные материалы нивелирования поверхности по квадратам со стороной 20 м. Всего отобрано шесть участков размером 400×400 м каждый. Был применен известный способ последовательного разрежения сетки квадратов до 40, 60, 80 и 100 м.

По отметкам точек разреженной сетки методами билинейной и дифференциальной интерполяции вычислены отметки вершин первичных квадратов (двадцатиметровых). Полученные таким образом высоты сравнивали с высотами тех же точек, найденными из нивелирования. Разности высот принимали за истинные погрешности соответствующего способа моделирования. Затем для каждого участка рассчитывали средние квадратические погрешности m . Результаты эксперимента представлены в таблице.

Как видим, во всех без исключения случаях средние квадратические погрешности дифференциальной модели (9) меньше, чем

у билинейной. Гипотеза о возможном равенстве дисперсий также должна быть отвергнута по критерию Фишера [6].

Любая дискретная модель непрерывного объекта, каким является рельеф местности, сопровождается погрешностями. Поэтому при прочих равных условиях предпочтительнее будет та из них, погрешности которой меньше. В таком случае дифференциальная модель имеет определенное преимущество по сравнению с билинейной. К достоинствам рассматриваемой модели следует отнести также и то, что она обладает всеми свойствами топографической поверхности, которые сформулированы в [7].

Вернемся к интерполяции высот.

Обратная интерполяционная задача. Точку с заданной высотой в двухмерном пространстве можно определить однозначно, если фиксирована одна из координат, т. е. при заданной ординате находят абсциссу, или наоборот.

Преобразуя (9), получаем два квадратных уравнения

$$A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0 \quad (y = \text{const}); \quad (10)$$

$$B_1y^2 + B_2y + B_3 = 0 \quad (x = \text{const}), \quad (11)$$

где

$$A_1 = \frac{d}{2}(a_2 + a_4)y, \quad B_1 = \frac{d}{2}[b_3 + b_4x - a_4x(1-x)],$$

$$A_2 = (H_{10} - H_{00})(1-y) + \left\{ H_{11} - H_{01} - \frac{d}{2}[a_4y + b_4(1-y)] \right\} y - \frac{d}{2}a_2,$$

$$B_2 = (H_{01} - H_{00})(1-x) + \left(H_{11} - H_{10} - \frac{d}{2}b_4 \right) x - \frac{d}{2}b_3,$$

$$A_3 = \left(H_{00} - \frac{d}{2}b_3y \right) (1-y) + H_{01}y - H,$$

$$B_3 = \left(H_{00} - \frac{d}{2}a_2x \right) (1-x) + H_{10}x - H.$$

Здесь H — заданная отметка.

Решением задачи будут действительные корни уравнений (10) или (11), заключенные в интервале $[0, 1]$.

Чтобы интерполяция была эффективной, ее направление должно быть достаточно близким к линии наибольшей крутизны ската. Довольно малую окрестность любой точки топографической поверхности можно рассматривать как плоскость. В данной окрестности уклон линии произвольного направления с дирекционным углом α можно выразить формулой

$$i(\alpha) = i_{\max} \cos(\alpha - \theta), \quad (12)$$

где $i_{\max}$ — максимальный уклон; θ — дирекционный угол линии максимального уклона. Соответственно уклоны по осям координат

$$\begin{aligned} i(x) &= i_{\max} \cos \theta, \\ i(y) &= i_{\max} \sin \theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Решая уравнения (13) относительно $i_{\max}$ и θ , получаем

$$i_{\max} = \sqrt{i^2(x) + i^2(y)},$$

$$\theta = 180^\circ \{1 - \operatorname{sign}[i(y)]\} + \operatorname{sign}[i(y)] \arccos \left[\frac{i(x)}{i_{\max}} \right], \quad (14)$$

где

$$\operatorname{sign} z = \begin{cases} -1, & \text{если } z < 0; \\ 1, & \text{если } z \geq 0. \end{cases}$$

Уточненные значения уклонов по осям координат $\tilde{i}(x)$ и $\tilde{i}(y)$ определяют дифференцированием (9) по переменным x и y :

$$\begin{aligned} \tilde{i}(x) &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{d} [(H_{10} - H_{00})(1 - y) + (H_{11} - H_{01})y] - \\ &\quad - \frac{1}{2} [(a_2 + a_4 y^2)(1 - 2x) + b_4 y(1 - y)], \\ \tilde{i}(y) &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{d} [(H_{01} - H_{00})(1 - x) + (H_{11} - H_{10})x] - \\ &\quad - \frac{1}{2} [(b_3 + b_4 x)(1 - 2y) + 2a_4 x(1 - x)y]. \end{aligned} \quad (15)$$

При помощи (15) и (14) решают вопрос о выборе оптимального направления интерполяции. Если $315^\circ < \theta < 45^\circ$ или $135^\circ < \theta < 225^\circ$, точки с заданной высотой определяют из решения (10). В остальных случаях предпочтительнее (11). Следует отметить, что функции (15) непрерывны внутри ячейки и только на тех линиях сетки, которые параллельны направлению дифференцирования. Рассмотренный алгоритм можно использовать для отслеживания горизонталей на ЭВМ.

Определение местоположения характерных линий и характерных точек рельефа. В [8] разработана методика выделения ячеек, через которые проходят линии водораздела или водослива. Дифференциальная модель дает возможность уточнить положение этих линий внутри ячейки.

Необходимым признаком того, что данная точка поверхности принадлежит к линии водораздела или водослива, является наличие в ней хотя бы одного экстремального сечения. Приравняв выражения (15) к нулю и решив первое из них относительно x , а второе относительно y , будем иметь

$$x = \frac{\frac{d}{2} [(a_4 - b_4)y^2 + b_4 y + a_2] - (H_{10} - H_{00})(1 - y) - (H_{11} - H_{01})y}{d(a_4 y^2 + a_2)}, \quad (16)$$

$$y = \frac{\frac{u}{2}(b_4 x + b_3) - (H_{01} - H_{00})(1-x) - (H_{11} - H_{10})x}{d[a_4 x^2 + (b_4 - a_4)x + b_3]}. \quad (17)$$

Предположим в некоторой ячейке (рис. 2)

$$\text{sign}[i(x)_{00}] > \text{sign}[i(x)_{10}].$$

Мы имеем здесь линию водораздела. Решение (16) при $y_0=0$ дает нам точку $W_0(x_0, y_0)$. Выбрав малое приращение Δy из (16), определяем следующую точку $W_1(x_1, y_1)$ при $y_1 = y_0 + \Delta y$. Если дирекционный угол отрезка W_0W_1 заключен в интервале $[45^\circ \dots 135^\circ]$, продолжаем решение при $y_2, y_3 \dots y_k$. И так до тех пор, пока характерная линия не достигнет противоположной стороны

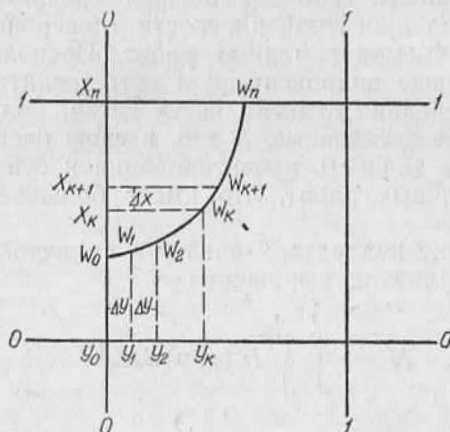


Рис. 2. Определение местоположения характерной линии.

квадрата или дирекционный угол k -го отрезка не выйдет за интервал $[45^\circ \dots 135^\circ]$. В последнем случае точку W_{k+1} определяют из (17) при $x_{k+1} = x_k + \Delta x$ и т. д.

Чтобы определить внутри ячейки автономную характерную точку (вершину, дно котловины, седловину), необходимо (16) и (17) решать совместно методом последовательных приближений Зейделя [4] при начальных условиях $x=0,5, y=0,5$. Обозначив правые части выражений (16) и (17) соответственно $\varphi(y)$ и $\varphi(x)$, получим

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi(y_n); \\ y_{n+1} &= \varphi(x_{n+1}). \end{aligned} \quad (18)$$

Так как

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \varphi(x)}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi(y)}{\partial y} = \frac{a_4(1-2x)y + b_4(0,5-y) - \frac{1}{d}(H_{00} + H_{11} - H_{01} - H_{10})}{a_4 y^2 + a_2},$$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \frac{a_4(1-2x)y + b_4(0,5-y) - \frac{1}{d}(H_{00} + H_{11} - H_{01} - H_{10})}{a_4 x^2 + (b_4 - a_4)x + b_3}, \quad (19)$$

процесс последовательных приближений (18) сходится, если в выражениях (19) знаменатель по абсолютной величине больше числителя.

Определение средней отметки при планировочных работах. При планировке поверхности необходимо знать среднюю отметку для правильного выбора проектной плоскости (поверхности), а также для вычисления объемов земляных работ. Поскольку дифференциальная ЦМР лучше аппроксимирует естественную поверхность, чем билинейная, средние отметки ячеек сетки, полученные на ее основе, более репрезентативны. А это, в свою очередь, дает возможность повысить точность проектирования и существенно уточнить объемы земляных работ, что имеет большое практическое значение.

Среднюю отметку квадратной ячейки в принятой нами системе единиц можно получить из выражения

$$\bar{H} = \int_0^1 \int_0^1 H(x, y) dx dy. \quad (20)$$

Подставив в (20) вместо $H(x, y)$ его значение из (9) и выполнив интегрирование, находим

$$\bar{H} = \frac{1}{4}(H_{00} + H_{01} + H_{10} + H_{11}) - \frac{d}{12} \left(a_2 + \frac{a_4}{3} + b_3 + \frac{b_4}{2} \right). \quad (21)$$

Рассмотренные нами ЦМР и связанные с ней алгоритмы достаточно просты и могут быть реализованы на ЭВМ без каких-либо затруднений. Вместе с тем при минимальном объеме исходных данных она способна дать весьма ценную информацию о рельефе местности.

В заключение следует отметить, что данную модель помимо топографии можно также применять в геологии и геометрии недр для моделирования подошвы и кровли полезного ископаемого и подсчета его запасов.

1. Бойко А. В. Методы и средства автоматизации топографических съемок. — М.: Недра, 1980. — 222 с. 2. Гармиз И. В. Оценка точности определения высот точек по цифровой модели рельефа. — Л., 1972. — 18 с. — Рукопись деп. в ВИНТИ. 3. Девдариани А. С. Математический анализ в геоморфологии. — М.: Недра, 1967. — 155 с. 4. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. — 664 с. 5. Дуда Р., Харп П.

Распознавание образцов и анализ сцен. — М.: Мир, 1976. — 511 с. 6. Смирнов Н. В., Белугин Д. А. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. — М.: Недра, 1969. — 379 с. 7. Соболевский П. К. Современная горная геометрия. — Социалистическая реконструкция и наука, 1932, № 7, с. 42—78. 8. Рудый Р. М. Выделение структурных линий рельефа аналитическим методом. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 39, с. 135—140. 9. Gazdzicki I. Informatyka w geodezji i kartografii. — Warszawa: PPWK, 1975. — 300 s. 10. Schut G. H. Review of Interpolation Methods for Digital Terrain Models. — The Canadian Surveyor, v. 30, № 5, 1976, p. 389—412.

Статья поступила в редколлегию 16. 11. 84