УДК 528.412

И. И. КОВАЛИВ, З. Р. САВЯК

ТОЧНОСТЬ ОДНОЗНАЧНО РЕШАЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАСЕЧКИ

В настоящей статье с целью более широкого применения линейных засечек в практике инженерно-геодезических изысканий приводим общую теорию оценки точности определения пунктов по координатам, вычисляемым линейной засечкой однозначно. Предположим, что погрешности определения координат исходных пунктов пренебрежимо малы; результаты измерения линий между собой независимы; линейная засечка производится без измерения избыточных величин; исходные пункты размещены так, что при их взаимном соединении отрезками прямых линий образуется один геометрический симплекс.

Обозначим n — количество исходных пунктов, $n=2, 3, 4$; T_i — наименование исходного пункта с номером i, $i=1, 2, \ldots, n$; U_j — наименование текущей координаты в системе прямоугольных координат с номером j, $j=1, 2, 3$:

$$U_j = \begin{cases} x, \text{ если } j=1 \\ y, \text{ если } j=2 \\ z, \text{ если } j=3; \end{cases}$$

U_{ji} — значение координаты U_j исходного пункта T_i. Система координат U_j выбрана так, чтобы выполнялось условие: $U_{ji}=$ $=\text{const}=0$ при $j\geqslant n$; P — наименование определяемого пункта; U_{jp} — значение координаты U_j определяемого пункта P; N_n —

мера геометрического симплекса, образованного всеми исходными пунктами, размерностью $[m^{n-1}]$:

$$N_n = \begin{cases} l \text{ — длина отрезка } T_1T_2, \text{ если } n=2 \\ F \text{ — площадь треугольника } T_1T_2T_3, \text{ если } n=3 \\ V \text{ — объем тетраэдра } T_1T_2T_3T_4, \text{ если } n=4; \end{cases}$$

M_i — мера геометрического симплекса, не содержащего T_i, размерностью $[m^{n-2}]$:

$$M_i = \begin{cases} 1, \text{ если } n=2 \\ a_i \text{ — длина стороны треугольника } T_1T_2T_3, \\ \text{не содержащей вершину } T_i, \text{ если } n=3 \\ F_i \text{ — площадь грани тетраэдра } T_1T_2T_3T_4, \\ \text{не содержащей вершину } T_i, \text{ если } n=4; \end{cases}$$

M_{ij} — мера проекции геометрического симплекса, не содержащего T_i на плоскость $U_j=0$; R_i — вычисленное расстояние от пункта T_i до начала координат,

$$R_i^2 = \sum_{j=1}^{n-1} U_{ji}^2;$$

S_i — измеренное расстояние от определяемого пункта P до исходного T_i; S_{i0} — истинное значение S_i:

$$S_{i0}^2 = \sum_{j=1}^{3} (U_{ji} - U_{jp})^2; \tag{1}$$

$$m_{S_i} = m_S(S_i) - \tag{2}$$

погрешность измерения линии S_i, в общем случае функционально зависящая от длины линии: m_n — погрешность определения пункта P линейной засечкой по координатам U_{jp}, вычисляемым однозначно:

$$m_n = \begin{cases} m_x, \text{ если } n=2 \\ m_\pi = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \text{ если } n=3 \\ m_p = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}, \text{ если } n=4. \end{cases}$$

Линейной засечкой по n исходным пунктам возможно однозначно вычислить n—1 значения координат определяемого пункта из системы n уравнений (1):

$$U_{jp\,(j<n)} = \frac{1}{2(n-1)N_n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} M_{ij} (S_{i0}^2 - R_i^2).$$

Если в матрице $A\equiv[U_{ji}]$ вычеркнуть строки $U_{ji}=\text{const}$ и образовать новую матрицу $B\equiv[U_{jk}=U_{ji(i\neq 1)}-U_{j1}]$, то $N_n=\frac{1}{(n-1)!}\det[U_{jk}]$, а если в матрице A вычеркнуть строки $U_{ji}=\text{const}$, строку с номером j, столбец с номером i и образовать новую матрицу $C\equiv[U_{qk}=U_{qk(k\neq 1)}-U_{q1}]$, то $M_{ij}=\frac{1}{(n-2)!}\det\times\times[U_{qk}]$.

На основании теории ошибок средняя квадратическая погрешность определения пункта, вычисленная через частные производные $\frac{\partial U_{jp}}{\partial S_i}$, примет вид

$$m_n=\frac{1}{(n-1)|N_n|}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(M_i S_i m_{S_i})^2}. \tag{3}$$

Выражение (3) — формула погрешности однозначно решаемой линейной засечки, из которой видно, что m_n не зависит от выбранной системы координат, а зависит от взаимного расположения пунктов.

Формулы для наиболее часто встречающихся случаев линейной засечки при $m_{S_i}=m+\lambda S_i$, где $m=\text{const}$, $\lambda=\text{const}$

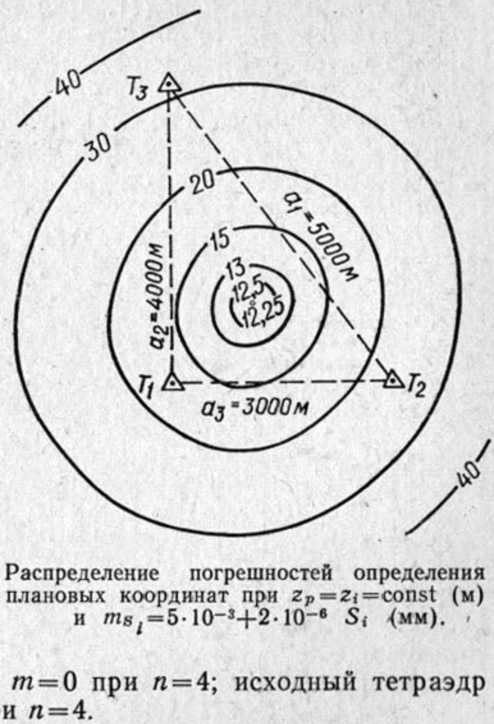
Наименование вычисляемой величины	Количество исходных пунктов $n=2$	$n=3$	$n=4$
Погрешность m_n	$\frac{1}{l}\sqrt{\sum_{i=1}^{2}[S_i(m+\lambda S_i)]^2}$	$\frac{1}{2F}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}[a_i S_i(m+\lambda S_i)]^2}$	$\frac{1}{3V}\sqrt{\sum_{i=1}^{4}[F_i S_i(m+\lambda S_i)]^2}$
Координаты U_{jp_0} наивыгоднейшего пункта	$\begin{cases}x_{p_0}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\\ y_{p_0}=y_i\\ z_{p_0}=z_i\end{cases}$	$z_{p_0}=z_i$, остальные координаты U_{jp_0} в общем случае аналитически не вычисляются. Если $\lambda=0$, то $U_{jp_0}=\left(\sum_{i=1}^{3}a_i^2 U_{ji}\right)/\sum_{i=1}^{3}a_i^2$	В общем случае координаты U_{jp_0} аналитически не вычисляются. Если $\lambda=0$, то $U_{jp_0}=\left(\sum_{i=1}^{4}F_i^2 U_{ji}\right)/\sum_{i=1}^{4}F_i^2$
Погрешность m_n в точке U_{jp_0} правильного симплекса	$\sqrt{2}/2(m+1/2\lambda l)$	$2\sqrt{3}/3(m+\sqrt{3}/3\lambda a)$, где a — длина стороны равностороннего треугольника	$3/2(m+\sqrt{6}/4\lambda b)$, где b — длина ребра правильного тетраэдра

Учитывая (1) для выражения (2) и подставляя (1) в (3), получаем

$$m_n = \frac{1}{(n-1)\,|N_n|} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[M_i\, m_S(U_{jp}) \sum_{j=1}^{3} (U_{ji} - U_{jp}) \right]^2}, \quad (4)$$

т. е. $m_n = m_n(U_{jp})$ — уравнение поверхности m_n в системе координат $U_j = U_{jp}$.

Решая уравнения $\frac{\partial m_n}{\partial U_{jp}} = 0$ и неравенство $m_n \leqslant m_{n\,\text{доп}}$, где $m_{n\,\text{доп}}$ — допустимая погрешность определения пунктов, можно вычислить (не всегда аналитически) координаты U_{jp_0} такого пункта P, для которого m_n принимает минимальное значение (наивыгоднейшее положение пункта), и допустимую область проведения измерений.



Распределение погрешностей определения плановых координат при $z_p = z_i = \text{const}$ (м) и $m_{S_i} = 5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-6}\ S_i$ (мм).

В таблице приведены формулы для наиболее часто встречающихся случаев линейной засечки. Координаты наивыгоднейшего пункта U_{jp_0} можно аналитически определить еще и в таких частных случаях: исходный треугольник равнобедренный, $m = 0$ при $n = 3$; исходный треугольник равносторонний, $m \neq 0$, $\lambda \neq 0$ при $n = 3$; исходный тетраэдр с основанием в форме равностороннего треугольника, $m = 0$ при $n = 4$; исходный тетраэдр правильный, $m \neq 0$, $\lambda \neq 0$ при $n = 4$.

В указанных случаях наивыгоднейший пункт находится в ортоцентре треугольника при $n = 3$ и в центре описанной сферы при $n = 4$.

На рисунке приведен пример распределения погрешности m_n при $z_p = z_i$. По выражению (4) можно построить поверхности уровней m_n для любого взаимного расположения исходных пунктов.

Статья поступила в редколлегию 12. 03. 87