УДК 528.34:516.3

Р. Г. ПИЛИПЮК

# К ВОПРОСУ О ПЕРЕДАЧЕ КООРДИНАТ В СЕТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Сформулируем задачу о передаче пространственных прямоугольных прямолинейных координат следующим образом: даны пространственные прямоугольные прямолинейные координаты начальной точки триангуляции, которую мы обозначим цифрой *1* ($x_1$, $y_1$, $z_1$), азимут направления $1-2=\alpha_{12}$ и длина стороны $1-2=s_{12}$. Кроме указанных данных будем считать известными астрономические координаты точки *1* — $\varphi_1$ и $\lambda_1$, все горизонтальные углы $a$, измеренные в треугольниках, и зенитные расстояния $\beta$.

Для решения поставленной задачи выберем систему пространственных прямоугольных прямолинейных координат следующим образом: ось $OZ$ этой системы направим на север, параллельно оси вращения Земли, плоскость $XOY$ размещается внутри Земли, параллельно плоскости экватора, но при этом считаем, что ось $OX$ лежит в плоскости начального астрономического меридиана, проходящего через Гринвич. Соответственно ось $OY$ будет отстоять на 90° к востоку от оси $OX$.

В упомянутой выше системе приращения координат между двумя ближайшими пунктами сети определяются по известным [1,2] формулам:

$$\Delta x_{12}=s_{12}\cdot\cos\varphi_1\cos\lambda_1\cos\beta_{12}-\sin\varphi_1\cos\lambda_1\cos\alpha_{12}\sin\beta_{12}\cdot s_{12}-$$
$$-s_{12}\sin\lambda_1\sin\alpha_{12}\cdot\sin\beta_{12},$$
$$\Delta y_{12}=s_{12}\cdot\sin\alpha_{12}\sin\beta_{12}\cos\lambda_1-\sin\beta_{12}\cos\alpha_{12}\sin\varphi_1\sin\lambda_1\cdot s_{12}+$$
$$+s_{12}\cos\beta_{12}\cos\varphi_1\sin\lambda_1, \tag{1}$$
$$\Delta z_{12}=s_{12}\cdot\sin\beta_{12}\cos\alpha_{12}\cos\varphi_1+s_{12}\cdot\cos\beta_{12}\sin\varphi_1,$$

где индексы у $\varphi$ и $\gamma$ соответствуют обозначениям вершин треугольника, а порядок следования индексов у $s$, $\beta$ и $\alpha$ соответствует обозначению начала и конца рассматриваемого направления.

Для упрощения выражений (1) построим в точке *1* вспомогательную сферу единичного радиуса (рис. 1). Направления, исходящие из точки *1*, пересекают поверхность вспомогательной сферы в точках:

$M$ — точка пересечения орта отвесной линии точки *1* с поверхностью сферы;

$P$ — точка, в которой линия, проведенная через точку *1*, параллельно оси $Z$, пересекается с поверхностью сферы;

$N$ — точка пересечения орта направления *1—2* (с точки *1* на точку *2*) — $l_{12}$ — с поверхностью сферы.

Соединив эти точки на поверхности сферы дугами больших кругов, получим сферический треугольник $MPN$, в котором угол при точке $M$ равен астрономическому азимуту линии *1—2* — $\alpha_{12}$, дуга $MN$ равна зенитному расстоянию направления *1—2* — $\beta_{12}$, дуга $MP$ равна $90° - \varphi_1$.

Обозначим в этом треугольнике угол при точке $P$ через $C_1^1$, а дугу $PN$ — через $u_{12}$ (нижний индекс у $C$ соответствует обозначению вершины угла треугольника, а верхний — номеру треугольника, в котором измерялся угол; порядок следования индексов у $u$ соответствует рассмотренному для $\beta$).

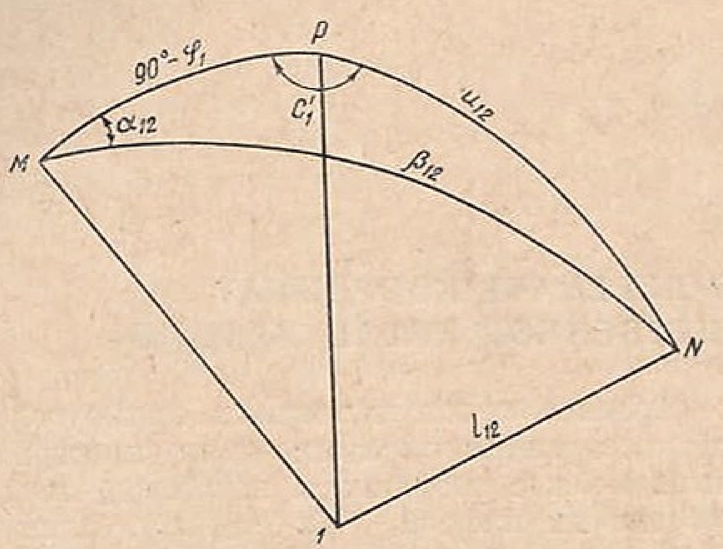



Рис. 1. Двугранный угол $C$ и дуга $u$ в исходном пункте сети.

Тогда на основании формул сферической тригонометрии можно записать следующие равенства:

$$\sin u_{12} \sin C_1^1 = \sin\alpha_{12} \sin\beta_{12},$$

$$\sin u_{12} \cos C_1^1 = \cos\beta_{12} \cos\varphi_1 - \sin\beta_{12} \sin\varphi_1 \cos\alpha_{12},$$

$$\cos u_{12} = \cos\beta_{12} \sin\varphi_1 + \sin\beta_{12} \cos\varphi_1 \cos\alpha_{12}. \qquad (2)$$

Вынесем в уравнениях (1) за скобки $s_{12}\cos\lambda_1$ и $s_{12}\sin\lambda_1$. Учитывая формулы (2), мы после несложных преобразований получаем следующие выражения:

$$\Delta x_{12} = s_{12} \sin u_{12} \cos\gamma_{12}, \quad \Delta y_{12} = s_{12} \sin u_{12} \sin\gamma_{12}, \quad \Delta z_{12} = s_{12} \cos u_{12}, \qquad (3)$$

где

$$\gamma_{12} = \lambda_1 + C_1{}^1. \qquad (4)$$

По формулам (3) нетрудно убедиться в том, что передача координат $x$ и $y$ происходит в плоскости $XOY$ посредством приращений координат. Угол $u$ служит для определения проекции линии $s$ на плоскость $XOY$, а угол $\gamma_{12} = \lambda_1 + C_1^1$ является ориентирующим углом линии *1—2* на плоскости $XOY$.

Ориентирующие углы $\gamma$ отсчитываются от положительного направления оси абсцисс или линии, параллельной к ней, против хода часовой стрелки, до направления проекции данной линии на плоскости $XOY$. Из (4) следует, что для определения ориентирующего угла, например, начальной стороны триангуляционной сети в плоскости $XOY$, необходимо знать не только долготу начального пункта $\lambda_1$, но и величину угла $C_1^1$.

Угол $C_1^1$ является мерой двухгранного угла, образованного в данной точке плоскостью астрономического меридиана и плоскостью, проходящей через линию *1—2* и линию, параллельную оси $OZ$, но проведенную через точку *1* (см. рис. 1). Величину этого угла можно определить, разделив в выражении (2) первое уравнение на второе. Получим

$$\operatorname{tg} C_{1T}^1 = \frac{\sin\alpha_{12} \sin\beta_{12}}{\cos\beta_{12}\cos\varphi_1 - \sin\beta_{12}\sin\varphi_1\cos\alpha_{12}}. \qquad (5)$$

При определении $C_1^1$ по формуле (5) мы получаем в общем случае значение табличного угла. Для определения действительных значений угла $C_1^1$ необходимо учитывать знаки числителя и знаменателя формулы (5) по следующему правилу:

а) Если числитель и знаменатель имеют знак «плюс», то $C_1^1 = C_{1T}^1$.

б) Если числитель и знаменатель имеют знак «минус», то $C_1^1 = 180° + C_{1T}^1$.

в) Если числитель с плюсом, знаменатель с минусом, тогда $C_1^1 = 180° - C_{1T}^1$.

г) Числитель с минусом, знаменатель с плюсом, тогда $C_1^1 = 360° - C_{1T}^1$.

Теперь задача по передаче координат от начального пункта триангуляционной сети по выбранной ходовой линии может быть сведена к следующим процессам:

1. Определение величины углов в плоскостях отдельно взятых треугольников.

2. Определение длин сторон треугольников по выбранной ходовой линии.

3. Определение значений углов $u$ для направлений в цепи треугольников.

4. Определение значений углов в треугольниках на плоскости $XOY$.

5. Определение значений ориентирующих углов $\gamma$ исходной стороны сети, а также всех сторон ходовой линии.

6. Определение приращений координат и координат точек ходовой линии.

Решение этой задачи рассмотрим на следующем примере. Пусть задана цепь треугольников (рис. 2) и ставится задача произвести передачу координат от начального пункта $1$ $(x_1, y_1, z_1)$ по ходовой линии, обозначенной на рисунке пунктиром и выбранной произвольно. Известными величинами в этой цепи треугольников будем считать следующие: астрономические координаты $\varphi_1$ и $\lambda_1$ точки $1$, астрономический азимут $\alpha_{12}$ и длину стороны $s_{12}$ линии $1$—$2$, а также все измеренные горизонтальные углы в треугольниках $a$ и зенитные расстояния всех направлений $\beta$.

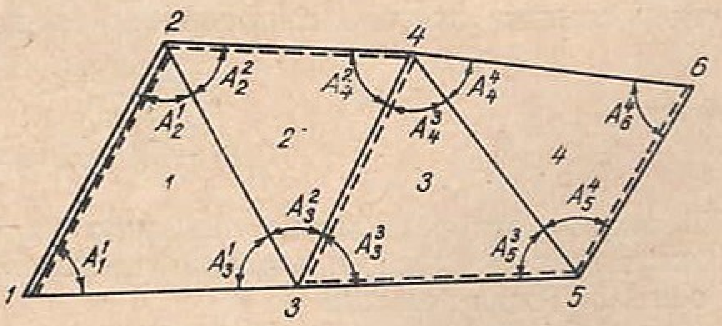


Рис. 2. Схема пространственной триангуляционной сети.

Соблюдая последовательность вычислительных операций, приведенную выше, определяем в первую очередь значения углов в плоскости каждого отдельного треугольника, образованные направлениями, выходящими из его вершин. В дальнейшем эти углы будем обозначать заглавной буквой $A_n^i$ с индексом внизу, который соответствует номеру вершины треугольника, и с индексом вверху, указывающим на номер треугольника в цепи. Величина этого угла определяется из формулы косинусов сторон сферической тригонометрии и в общем виде записывается таким образом:

$$\cos A_n^i = \cos\beta_{n,m} \cos\beta_{n,v} + \sin\beta_{n,m} \sin\beta_{n,v} \cos a_{m,v}, \tag{6}$$

где $i$ — порядковый номер треугольника, $n$ — номер (название) вершины треугольника, с которой производились наблюдения, $m, v$ — номера (названия) точек наведения.

Например,

$$\cos A_2^1 = \cos\beta_{21}\cos\beta_{23} + \sin\beta_{21}\sin\beta_{23}\cos a_{13}.$$

Определение длин сторон треугольников следует производить по формуле синусов, используя значения плоских углов в треугольниках.

Например,

$$\frac{s_{23}}{\sin A_1^1} = \frac{s_{12}}{\sin A_3^1},$$

отсюда

$$s_{23} = s_{12}\frac{\sin A_1^1}{\sin A_3^1}.$$

Следующий этап вычислений — определение углов $u_{12}$. Под углом $u$ подразумевается угол, образованный в каждой вершине треугольника линией, параллельной к оси $OZ$ системы пространственных прямоугольных координат, и направлением стороны треугольника. В точке *1* триангуляционной сети углы $u_{12}$ и $u_{13}$ определяются по формуле (2), считая известной широту $\varphi_1$ этой точки и азимут $\alpha_{12}$, а также величины $\beta_{12}$, $\beta_{13}$ и $a_{23}$. Значения углов $u_{21}$ и $u_{31}$ определяются соответственно на основании следующих зависимостей:

$$u_{21} = 180° - u_{12};\quad u_{31} = 180° - u_{13}.$$

Для определения величины угла $u_{23}$ по данным этого же треугольника представим себе, что треугольник *123* образован векторами $r_{12}$, $r_{23}$, $r_{31}$, орты которых обозначим соответственно как $l_{12}$, $l_{23}$, $l_{31}$. В таком треугольнике должно выполняться следующее векторное равенство:

$$r_{12} + r_{23} + r_{31} = 0$$

или

$$l_{12}s_{12} + l_{23}s_{23} + l_{31}s_{31} = 0.$$

Умножим это выражение скалярно на единичный вектор $K$, который направлен в каждой вершине треугольника по линии, параллельной оси $OZ$. Тогда получим

$$l_{12}\cdot K\, s_{12} + l_{23}\cdot K\, s_{23} + l_{31}\cdot K\, s_{31} = 0.$$

Но

$$l_{12}\cdot K = \cos u_{12},\quad l_{23}\cdot K = \cos u_{23},\quad l_{31}\cdot K = \cos u_{31}.$$

Таким образом,

$$\cos u_{12}\, s_{12} + \cos u_{23}\cdot s_{23} + \cos u_{31}\, s_{31} = 0,$$

отсюда

$$\cos u_{23} = -\frac{\cos u_{31}\, s_{31}}{s_{23}} - \frac{\cos u_{12}\, s_{12}}{s_{23}}.$$

Отношения $\frac{s_{31}}{s_{23}}$ и $\frac{s_{12}}{s_{23}}$ определяются на основании теоремы синусов и равны соответственно:

$$\frac{s_{31}}{s_{23}} = \frac{\sin A_2^1}{\sin A_1^1};\quad \frac{s_{12}}{s_{23}} = \frac{\sin A_3^1}{\sin A_1^1}.$$

После подстановки этих выражений и замены $\cos u_{31}$ на $-\cos u_{13}$ получаем

$$\cos u_{23} = \frac{\cos u_{13} \sin A_2^1 - \cos u_{12} \sin A_3^1}{\sin A_1^1}. \qquad (7)$$

Значение угла $u_{24}$, который образован направлением с точки *2* на точку *4* и линией, параллельной оси $OZ$, в точке *2* надо определять

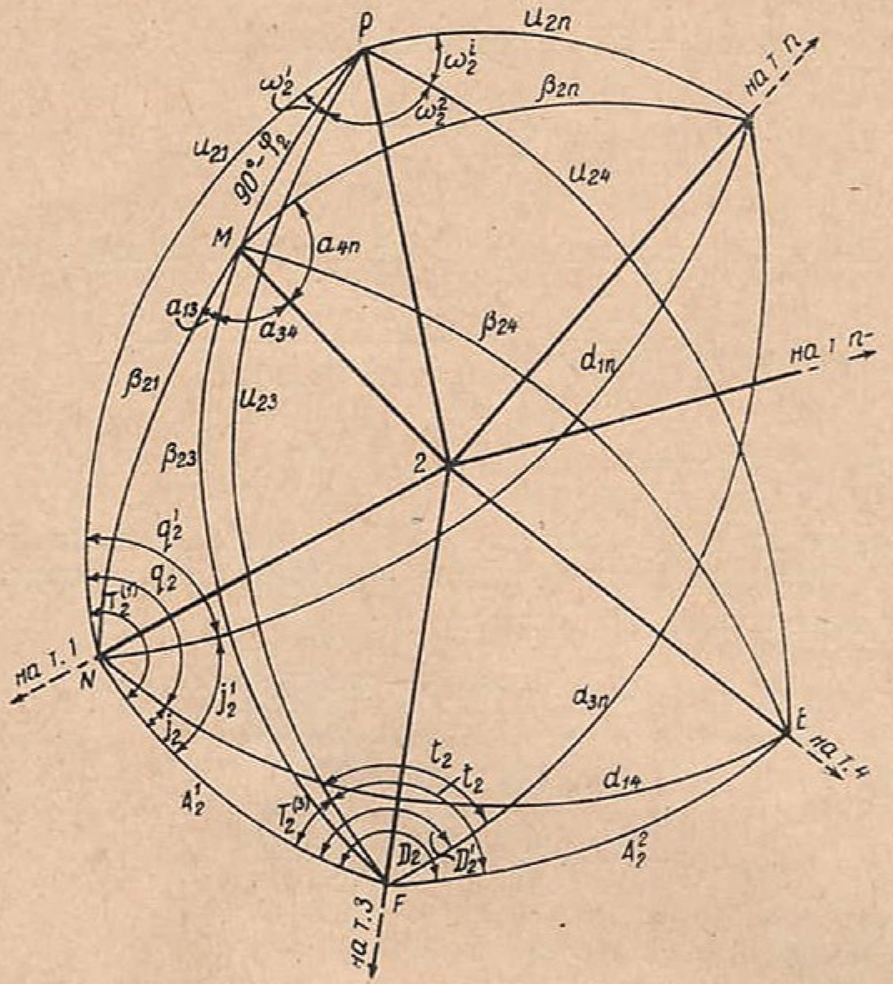


Рис. 3. К определению угла $u$ произвольного направления сети пространственной триангуляции.

исходя из того, что плоскость второго треугольника в общем случае не совпадает с плоскостью предыдущего треугольника. Поэтому для определения величины $u_{24}$ построим вспомогательную сферу единичного радиуса в точке *2* (рис. 3).

Направления, проведенные из точки *2* на пункты триангуляционной сети *1, 3* и *4,* пересекаются с поверхностью единичной сферы в точках $N$, $F$, $E$. Для получения на сфере точек $P$ и $M$, проводят через точку *2* линию, параллельную оси $OZ$, и отвесную линию точки *2*. Соединив точку $M$ с точками $N$, $F$ и $E$ дугами больших кругов, получаем

$$\smile MN = \beta_{21}; \ \smile MF = \beta_{23}; \ \smile ME = \beta_{24},$$

причем углы при точке $M$ в сферических треугольниках $EMF$ и $FMN$ равны соответственно $a_{13}$ и $a_{34}$, то есть горизонтальным углам, измеренным в точке *2*.

Дуги больших кругов, соединяющие точку $P$ с точками $N$, $F$ и $E$, равны, согласно нашим обозначениям, углам $u_{21}$, $u_{23}$ и $u_{24}$. Кроме того, соединив дугой большого круга точку $E$ с $N$, получим дугу $NE$, которую обозначим через $d_{14}$.

Из сферического треугольника $NME$ определим значение дуги $NE$. Имеем

$$\cos d_{14}=\cos\beta_{21}\cos\beta_{24}+\sin\beta_{21}\sin\beta_{24}\cos a_{14},$$

где $a_{14}=a_{13}+a_{34}$.

Если в сферическом треугольнике $NFE$ угол при точке $F$ обозначить через $D_2$, то его значение можно определить из следующей зависимости:

$$\cos d_{14}=\cos A_2^1\cos A_2^2+\sin A_2^1\sin A_2^2\cos D_2,$$

откуда

$$\cos D_2=\frac{\cos d_{14}-\cos A_2^1\cos A_2^2}{\sin A_2^1\sin A_2^2}. \tag{8}$$

Значение этого же угла можно определить и из такой формулы:

$$\cos\frac{D_2}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin(p-d_{14})}{\sin A_2^1\sin A_2^2}}, \tag{9}$$

где $p=\frac{1}{2}(d_{14}+A_2^1+A_2^2)$.

В сферическом треугольнике $NPF$ угол по вершине $F$ обозначим буквой $T_2^{(3)}$ Значение этого угла, как и угла $D_2$, можно определить также по двум различным формулам:

$$\cos T_2^{(3)}=\frac{\cos u_{21}-\cos u_{23}\cos A_2^1}{\sin u_{23}\sin A_2^1} \tag{10}$$

или

$$\cos\frac{T_2^{(3)}}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_1\cdot\sin(p_1-u_{21})}{\sin u_{23}\sin A_2^1}}, \tag{10'}$$

где $p_1=\frac{1}{2}(u_{21}+u_{23}+A_2^1)$.

Из сферического треугольника $PFE$ определяем $u_{24}$ по формуле

$$\cos u_{24}=\cos u_{23}\cos A_2^2+\sin u_{23}\sin A_2^2\cos t_2, \tag{11}$$

где $t_2=D_2-T_2^{(3)}$.

Таким образом, определяются значения углов $u_{23}$ и $u_{24}$ для второго треугольника триангуляционного ряда.

Другой путь для определения значения угла $u_{24}$ мог бы быть следующим. Обозначим для этого в сферическом треугольнике $NEF$ угол при вершине $N$ буквой $j_2$, а угол при вершине $N$, но в сферическом треугольнике $PNF$ — через $T_2^1$ (рис. 3). Значения этих углов определяются по формулам сферической тригонометрии. Имеем

$$\cos j_2=\frac{\cos A_2^2-\cos A_2^1\cos d_{14}}{\sin A_2^1\sin d_{14}}, \tag{12}$$

$$\cos T_2^{(1)}=\frac{\cos u_{23}-\cos u_{21}\cos A_2^1}{\sin u_{21}\sin A_2^1}. \tag{13}$$

Обозначив в сферическом треугольнике $PNE$ угол при вершине $N$ через $q_2$, определяем значение угла $u_{24}$.

$$\cos u_{24} = \cos u_{21} \cos d_{14} + \sin u_{21} \sin d_{14} \cos q_2, \qquad (14)$$

где $q_2 = T_2^{(1)} - j_2$.

При передаче координат по кратчайшей ходовой линии между начальной и конечной точками сети возникают случаи, когда необходимо определить значение угла $u$ не для одного из направлений смежного треугольника, а для направлений последующих треугольников. Так, при передаче координат по кратчайшей ходовой линии от точки *1* до точки *6* (см. рис. 2) такой случай имел бы место в вершинах *3* или *4*, где ставилась бы задача непосредственного вычисления значений угла $u_{35}$ (в точке *3*), или $u_{46}$ (в точке *4*). В рассматриваемом примере (рис. 2) эти вершины являются общими для трех треугольников, но в некоторых случаях количество треугольников, имеющих одну общую вершину, может быть значительно большим.

Задача по определению значения угла $u$ произвольного направления, которая возникает в случаях, рассмотренных выше, может быть решена по изложенной методике. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример: пусть точка *2* (рис. 3) является общей вершиной большого числа треугольников, причем номер последнего треугольника $i$. Вершинами этого треугольника являются точки $2 \ldots n-1$, $n$. Известными величинами считаем значения углов $u_{21}$, $u_{23}$ и $A_2^1$. Ставится задача определить значение угла $u_{2n}$ направления $2-n$. Из сферического треугольника $PFK$ по теореме косинусов находим

$$\cos u_{2n} = \cos u_{23} \cos d_{3n} + \sin u_{23} \sin d_{3n} \cos t_2'. \qquad (15)$$

Угол $d_{3n}$ образуется направлениями с точки *2* на точки *3* и $n$. На рисунке *3* этому углу соответствует дуга большого круга $FK$. Значение угла $d_3$ может быть определено по формуле (6), записанной для данного случая следующим образом:

$$\cos d_{3n} = \cos \beta_{23} \cos \beta_{2n} + \sin \beta_{23} \sin \beta_{2n} \cos a_{3n},$$

где $a_{3n}$ — горизонтальный угол, измеренный в точке *2*, между направлениями на точки *3* и $n$, а $\beta$ — значения зенитных расстояний, измеренных по этим же направлениям.

Угол $t_2' = D_2' - T_2^{(3)}$.

Для определения значения угла $D_2'$ рассматриваем сферический треугольник $NFK$. Записав формулы (8) и (9) применительно к данному случаю приведенным ниже образом, получим

$$\cos D_2' = \frac{\cos d_{1n} - \cos A_2^1 \cos d_{3n}}{\sin A_2^1 \sin d_{3n}}. \qquad (16)$$

Или

$$\cos \frac{D_2'}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_2 \cdot \sin (p_2 - d_{1n})}{\sin A_2^1 \sin d_{3n}}}, \qquad (16')$$

где $p_2 = \frac{1}{2}(d_{1n} + A_2^1 + d_{3n})$.

При этом

$$\cos d_{1n} = \cos \beta_{21} \cos \beta_{2n} + \sin \beta_{21} \sin \beta_{2n} \cos a_{1n}$$

и

$$a_{1n} = a_{13} + a_{34} + \cdots + a_{n-1,\,n}.$$

Угол $T_2^{(3)}$ определяется по формуле (10).

Индексы при $d$ соответствуют обозначению исходного и конечного направлений, образующих этот угол, индекс при $D$, $t$, $q$, $j$ идентичен наименованию вершины, с которой произведены наблюдения, а нижний и верхний индексы при $T$ обозначают соответственно номер вершины, с которой велись наблюдения, и название направления на точку, через которую проходит вертикальная плоскость, образующая с плоскостью отдельно взятого треугольника данный угол.

Из рис. 3 видно, что значение угла $u_{2n}$ может быть определено и из сферического треугольника $PNK$, а именно

$$\cos u_{2n} = \cos u_{21} \cos d_{1n} + \sin u_{21} \sin d_{1n} \cos q_2'. \tag{17}$$

Буквой $q_2^1$ в этой формуле обозначен угол при вершине $N$ в сферическом треугольнике $PNK$. Значение этого угла можно определить, исходя из рис. 3. Имеем:

$$q_2' = T_2^{(1)} - j_2'.$$

При этом угол $T_2^{(1)}$ определяется по формуле (13), а величину угла $j_2'$ можно вычислить из сферического треугольника $NKF$ по формуле косинусов сторон.

$$\cos d_{3n} = \cos d_{1n} \cos A_2^1 + \sin d_{1n} \sin A_2^1 \cos j_2',$$

откуда

$$\cos j_2' = \frac{\cos d_{3n} - \cos d_{1n} \cos A_2'}{\sin d_{1n} \sin A_2^1}. \tag{18}$$

Таким образом, существуют два пути, которые мы рассмотрели выше, для определения значений углов $u$.

После определения углов $u$ для необходимых направлений триангуляционного ряда приступают к вычислению проекций измеренных горизонтных углов на плоскости $XOY$, которые в дальнейшем будем обозначать буквой $\omega_n^i$ Индексы, вводимые в обозначения, означают то же, что и при $A$.

Углы $\omega$, то есть углы в треугольниках на плоскости $XOY$, являются функциями как углов $u$, так и углов $A$. Зависимость, которая существует между ними, может быть легко найдена из формул сферической тригонометрии.

Если применить для определения этой зависимости формулу косинусов сторон, то можно записать (по рис. 3):

$$\cos A_n^i = \cos u_{n,m} \cos u_{n,v} + \sin u_{n,m} \sin u_{n,v} \cos \omega_n^i,$$

откуда

$$\cos \omega_n^i = \frac{\cos A_n^i - \cos u_{n,m} \cos u_{n,v}}{\sin u_{n,m} \sin u_{n,v}}, \tag{19}$$

где $i$ — порядковий номер треугольника;
$n$ — номер (название) вершины треугольника, с которой производятся наблюдения;
$m, v$ — номера (названия) точек наведения.

Кроме того, используя формулу сферической тригонометрии, которая устанавливает зависимость в треугольнике между известными сторонами и углами, можно записать

$$\sin \frac{\omega_n^i}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p_3 - u_{n,m}) \cdot \sin (p_3 - u_{n,v})}{\sin u_{n,m} \cdot \sin u_{n,v}}} \tag{20}$$

или

$$\cos\frac{\omega_n^i}{2}=\sqrt{\frac{\sin p_3\cdot\sin\left(p_3-A_n^i\right)}{\sin u_{n,m}\sin u_{n,v}}}, \tag{20'}$$

где $p_3=\frac{1}{2}(A_n^i+u_{n,m}+u_{n,v})$.

Таким образом, формулы (19), (20) и (20′) дают возможность определить в каждой вершине триангуляционного ряда значения проекцией горизонтальных углов на плоскость $XOY$.

Теперь для передачи координат от начального пункта ряда при помощи вычисленных приращений координат (3) необходимо определить ориентирующие углы для сторон ходовой линии, причем значение ориентирующего угла исходной стороны определяется по формулам (4) и (5).

Если, например, ориентирующий угол линии *1—2* на плоскости $XOY$ $\gamma_{12}$ определен по формуле (4) с учетом (5), а проекции горизонтальных углов $\omega_n^i$, то ориентирующий угол стороны *2—3* на плоскости $XOY$ $\gamma_{23}$ вычислится по такой формуле:

$$\gamma_{23}=\gamma_{12}\pm 180^\circ+\omega_2^1.$$

Или в общем виде

$$\gamma_{n-1,n}=\gamma_{n-2,n-1}\pm 180^\circ\pm\omega_n^i \tag{21}$$

при $n=1, 2, 3, \ldots$

Причем, в правой части выражения (21) знак плюс перед третьим членом принимается в случае, когда известны значения правых по ходу углов $\omega$ и знак минус, — если известны значения левых по ходу углов $\omega$.

Координаты точек триангуляционного ряда $x$, $y$, $z$ определяются по известным приращениям на основании известных зависимостей:

$$\begin{aligned} x_n&=x_{n-1}+\Delta x_{n-1,n},\\ y_n&=y_{n-1}+\Delta y_{n-1,n},\\ z_n&=z_{n-1}+\Delta z_{n-1,n}, \end{aligned} \tag{22}$$

при $n=1, 2, 3, \ldots$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А. Е. Метод Хотина совместного определения плановых и высотных координат триангуляционных пунктов. Республ. межведомств. научно-технич. сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 4. Изд-во Львовского ун-та, 1966.

2. Hotine M. A. Primer of Non-classical Geodesy. London, 1959.

Работа поступила
3 декабря 1968 г.