

УДК 528.061

Е. К. НИКОЛЬСКИЙ

О СЕТЯХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ С РЕФРАКЦИОННЫМИ БАЗИСАМИ

Влияние рефракции при тригонометрическом нивелировании в настоящее время учитывается с помощью коэффициента рефракции k , который представляет собой обобщенную эмпирическую величину, не отражающую метеорологические условия в момент наблюдения. Слабые стороны такого учета рефракции очевидны, поэтому некоторые исследователи разрабатывали способы, основанные на вычислении коэффициентов рефракции по измеренным по каждому направлению метеорологическим характеристикам атмосферы. Однако эти способы оказались чрезвычайно трудоемкими и неточными, так как приходилось снимать многочисленные показания термометров, расположенных по вертикалям в различных точках атмосферы. Предлагались и другие способы, основанные на вычислении частных коэффициентов рефракции по каждому направлению только по геодезическим измерениям зенитных расстояний [1]. Недостатком этих способов было то, что в них не принимались во внимание метеорологические характеристики атмосферы.

Мы разработали методику учета рефракции, которая сочетает в себе использование метеорологических характеристик атмосферы, определяемых быстро и просто, и материалов геодезических измерений. При этом пришлось отказаться от понятия коэффициента рефракции, как величины, лишенной физического смысла.

Приняв за исходную формулу угла вертикальной рефракции [2], после ряда преобразований получим выражение угла вертикальной рефракции по направлению JO

$$(r''_B)_{JO} = \frac{\rho''}{S_{JO}} \sum_1^j \left\{ \frac{a(n_i - 1)}{T_i} + \frac{3,58 \cdot 10^{-6} \cdot P_i}{T_i^2} - \frac{0,557 \cdot 10^{-6} \cdot e_i}{T_i^2} \right\} l_i L_i + \\ + \frac{\rho''}{S_{JO}} \sum_1^j \left\{ \frac{c_i(n_i - 1)}{T_i} \right\} \frac{l_i L_i}{h_i}, \quad (1)$$

где S_{JO} — горизонтальное проложение линий JO ; a — нормальный адиабатический вертикальный градиент температуры; i — рефракционный блок (участок атмосферы с равномерным изменением показателя преломления, находящийся над местностью с постоянным уклоном и однородной подстилающей поверхностью), который имеет такие характеристики: l_i — его длина; L_i — расстояние от визирной цели до середины блока, T_i — среднее значение температуры на высоте визирного луча, P_i — среднее значение давления на высоте визирного луча, h_i — средняя высота визирного луча, e_i — среднее значение влажности на высоте визирного луча, c_i — среднее значение аномального вертикального градиента температуры на высоте 1 м, n_i — среднее значение показателя преломления воздуха.

Так как температура T_i , давление P_i , влажность e_i и показатель преломления n_i изменяются вдоль всего визирного луча незначительно, то стоящее в первых фигурных скобках выражение формулы (1) можно считать постоянной величиной для всех линий и записать его как

$$\begin{aligned} \frac{\rho''}{S_{JO}} \sum_1^j \left\{ \frac{a(n_i - 1)}{T_i} + \frac{3,58 \cdot 10^{-6} \cdot P_i}{T_i^2} - \frac{0,557 \cdot 10^{-6} \cdot e_i}{T_i^2} \right\} l_i L_i = \\ = \frac{S_{JO}}{2} \rho'' \left\{ \frac{a(n_{cp} - 1)}{T_{cp}} + \frac{3,58 \cdot 10^{-6} \cdot P_{cp}}{T_{cp}^2} - \frac{0,557 \cdot 10^{-6} \cdot e_{cp}}{T_{cp}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Значения T_i и n_i , стоящие во вторых фигурных скобках, также можно считать постоянными для всей линии визирования, но аномальный вертикальный градиент температуры на высоте 1 м c_i в каждом рефракционном блоке имеет свое значение. Однако трудность определения c_i для каждого участка линии визирования заставляет сделать допущение, что c_i постоянно для всей линии. В таком случае выражение $\frac{c_i(n_i - 1)}{T_i}$ предполагается постоянной величиной для линии JO и выносится за знак суммы.

Введя обозначения

$$\frac{\rho'' \cdot 10^3}{2} \left\{ \frac{a(n_{cp} - 1)}{T_{cp}} + \frac{3,58 \cdot 10^{-6} \cdot P_{cp}}{T_{cp}^2} - \frac{0,557 \cdot 10^{-6} \cdot e_{cp}}{T_{cp}^2} \right\} = A_{JO}, \quad (3)$$

$$\frac{\rho'' c_{cp} (n_{cp} - 1)}{T_{cp}^2} = B_{JO}, \quad (4)$$

выражение (1) перепишем в следующем виде:

$$(r'_B)_{JO} = A_{JO} S_{JO}^{km} + B_{JO} \frac{\left(\sum_1^j \frac{l_i L_i}{h_i} \right)_{JO}}{S_{JO}}. \quad (5)$$

Границами участков i будут резкие перегибы рельефа вдоль линии визирования (рис. 1). Значения S_{JO} и $\left(\sum_1^j \frac{l_i L_i}{h_i} \right)_{JO}$ определяются по профилям местности, а A_{JO} — по составленной таблице. Для пользования этой таблицей необходимо на пункте стояния теодолита один раз измерить температуру воздуха термометром-пращем и давление барометром-анероидом, что производится попутно с измерением зенитных расстояний и не требует дополнительного времени.

Значение A_{JO} , определяемое просто и с хорошей точностью, вычисляется одно для всех направлений, которые наблюдаются с пункта J . B_{JO} зависит от свойств подстилающей поверхности, поэтому для каждого направления на пункте J будет разным. Однако в первом приближении можно принять, что для нескольких одновременно наблюдаемых с данного пункта направлений значения B_{JO} будут близки между собой, так как погодные условия одинаковые и подстилающие поверхности вблизи данного пункта однородные. Следовательно, для каждой станции можно принять общие по всем направлениям значения A_J , B_J и по ним вычислить вертикальные углы рефракции для каждого направления, пользуясь формулой (5).

Величину B_{JO} без измерений вертикальных градиентов температуры получим в том случае, если будет известен по этому направлению истинный угол рефракции $(r_B^*)_{JO}$.

$$B_{JO} = \frac{(r_B^*)_{JO} - A_J S_{JO}^{km}}{\theta_{JO}}, \quad (6)$$

где

$$\theta_{JO} = \frac{\left(\sum_1^J \frac{l_i L_i}{h_i} \right)_{JO}}{S_{JO}}.$$

Направление, для которого известен истинный угол рефракции, называется рефракционным базисом.

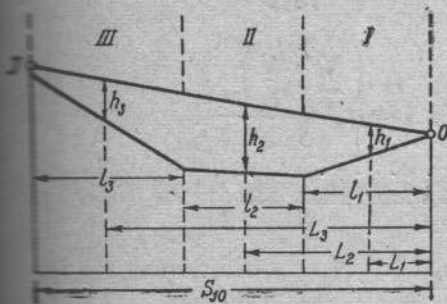


Рис. 1. Схема выделения рефракционных базисов: I, II, III — соответственно блоки № 1, 2, 3.



Рис. 2. Схема сети тригонометрического нивелирования с рефракционным базисом.

Истинный угол рефракции может быть найден по метеорологическим измерениям, по геодезическим измерениям и физическим методом (с помощью рефрактометра). В настоящее время наиболее простым и надежным является второй метод, основанный на совместном использовании результатов тригонометрического и геометрического нивелирования.

Построение сети тригонометрического нивелирования с рефракционным базисом рассмотрим на примере сети, показанной на рис. 2. Местность — холмистая, все пункты имеют отметки из геометрического нивелирования 2-, 3-го и 4-го классов, прямые и обратные зенитные расстояния измерялись высокоточным теодолитом ОТ-02, температура — аспирационным психрометром, давление определялось барометром-анероидом.

К сожалению, эта сеть создавалась не по специальной программе, поэтому температура и давление были измерены лишь на шести пунктах, имеются недостатки в методике измерения зенитных расстояний, кроме того, желательна большая надежность отметок пунктов. Однако в целом сеть оказалась пригодной для рассмотрения методических вопросов построения сетей с рефракционными базисами.

В качестве рефракционного базиса выбрана сторона 1—2, длиной 5,98 км, вдоль которой известно превышение h_{1-2}^r , полученное из геометрического нивелирования. На концах рефракционного базиса по зенитным расстояниям Z'_{1-2} и Z'_{2-1} , измеренным на пунктах 1 и 2 и приведенным к центрам знаков, были вычислены истинные углы рефракции

$$(r_B^*)_{1-2} = 90^\circ - \frac{h_{1-2}^r}{S_{1-2}} \rho'' + \frac{S_{1-2}}{2R} \rho'' - Z'_{1-2}, \quad (7)$$

$$(r_B^*)_{2-1} = 90^\circ - \frac{h_{2-1}^r}{S_{2-1}} \rho'' + \frac{S_{2-1}}{2R} \rho'' - Z'_{2-1}. \quad (8)$$

Для контроля сумма полученных по формулам (7) и (8) истинных углов рефракции сравнивалась с истинной суммой углов рефракции, определяемой по выражению

$$(\Sigma r_B^*)_{1-2} = 180^\circ - (Z'_{1-2} + Z'_{2-1}) + \frac{S_{1-2}}{R} \rho'' \quad (9)$$

Используя профили местности по каждому направлению, можно вычислить коэффициенты Θ :

$$\begin{aligned} \theta_{1-2} &= \frac{\left(\sum_1^j \frac{L_i L_i}{h_i} \right)_{1-2}}{S_{1-2}}, & \theta_{2-1} &= \frac{\left(\sum_1^j \frac{L_i L_i}{h_i} \right)_{2-1}}{S_{2-1}}, \\ \theta_{1-3} &= \frac{\left(\sum_1^j \frac{L_i L_i}{h_i} \right)_{1-3}}{S_{1-3}}, & \theta_{9-3} &= \frac{\left(\sum_1^j \frac{L_i L_i}{h_i} \right)_{9-3}}{S_{9-3}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициенты Θ связаны с эквивалентными высотами $(h_a)_{JO}$ визирных лучей следующим соотношением

$$\theta_{JO} = \frac{S_{JO}}{2(h_a)_{JO}}.$$

Затем по каждой линии были вычислены истинные суммы углов рефракции, присутствующих в прямых и обратных зенитных расстояниях:

$$\begin{aligned} (\Sigma r_B^*)_{1-3} &= 180^\circ - (Z'_{1-3} - Z'_{3-1}) + \frac{S_{1-3}}{R} \rho'', \\ &\dots \dots \dots \\ (\Sigma r_B^*)_{9-3} &= 180^\circ - (Z'_{9-3} - Z'_{3-9}) + \frac{S_{9-3}}{R} \rho''. \end{aligned} \quad (11)$$

Зная истинные углы рефракции по направлениям 1—2 и 2—1, коэффициенты Θ_{1-2} и Θ_{2-1} и, выбрав из таблицы A_1 и A_2 по измеренным на пунктах 1 и 2 температуре и давлению, определим значения B_1 и B_{2-1} :

$$\begin{aligned} B_{1-2} = B_1 &= \frac{(r_B^*)_{1-2} - A_1 S_{1-2}^{KM}}{\theta_{1-2}}, \\ B_{2-1} = B_2 &= \frac{(r_B^*)_{2-1} - A_2 S_{2-1}^{KM}}{\theta_{2-1}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Полученные коэффициенты использовались при определении расчетных углов рефракции по направлениям 1—3, 1—4, 1—5, 1—6, 2—3, 2—6, 2—7, 2—8, 2—9:

$$\begin{aligned} (r_B^*)_{1-3}^p &= A_1 S_{1-3}^{KM} + B_1 \theta_{1-3}; & (r_B^*)_{2-3}^p &= A_2 S_{2-3}^{KM} + B_2 \theta_{2-3}; \\ (r_B^*)_{1-4}^p &= A_1 S_{1-4}^{KM} + B_1 \theta_{1-4}; & (r_B^*)_{2-6}^p &= A_2 S_{2-6}^{KM} + B_2 \theta_{2-6}; \\ (r_B^*)_{1-5}^p &= A_1 S_{1-5}^{KM} + B_1 \theta_{1-5}; & (r_B^*)_{2-7}^p &= A_2 S_{2-7}^{KM} + B_2 \theta_{2-7}; \\ (r_B^*)_{1-6}^p &= A_1 S_{1-6}^{KM} + B_1 \theta_{1-6}; & (r_B^*)_{2-8}^p &= A_2 S_{2-8}^{KM} + B_2 \theta_{2-8}; \\ & & (r_B^*)_{2-9}^p &= A_2 S_{2-9}^{KM} + B_2 \theta_{2-9}. \end{aligned}$$

Исходя из сумм углов рефракции, вычисленных по формулам (11), получают условно-истинные углы вертикальной рефракции:

$$\begin{aligned}(r_B^*)_{3-1}^{y-n} &= (\Sigma r_B^*)_{3-1}^n - (r_B^*)_{1-3}^p; \\(r_B^*)_{4-1}^{y-n} &= (\Sigma r_B^*)_{4-1}^n - (r_B^*)_{1-4}^p; \\&\dots\dots\dots; \\(r_B^*)_{9-2}^{y-n} &= (\Sigma r_B^*)_{9-2}^n - (r_B^*)_{2-9}^p.\end{aligned}\quad (13)$$

Пользуясь этими значениями, определяют для пунктов 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 приближенные величины B'

$$\begin{aligned}B'_3 &= \frac{(r_B^*)_{3-1}^{y-n} - A_3 S_{3-1}^{km}}{\theta_{3-1}}; & B'_4 &= \frac{(r_B^*)_{4-1}^{y-n} - A_4 S_{4-1}^{km}}{\theta_{4-1}}; \\&\dots\dots\dots \\B'_9 &= \frac{(r_B^*)_{9-2}^{y-n} - A_9 S_{9-2}^{km}}{\theta_{9-2}}.\end{aligned}\quad (14)$$

По найденным значениям A_J и B_J можно вычислить согласно формуле (5) расчетные углы рефракции для всех направлений. Сумма прямых и обратных углов рефракции по каждому направлению не равна истинной сумме углов рефракции из-за неточности величин B' , определенных по формулам (14). Условно считаем, что B_1 и B_2 безошибочны. Исходя из этого, составляем 15 уравнений поправок:

$$\begin{aligned}V_{1-3} &= \theta_{3-1} x_3 + \{(A_1 + A_2) S_{1-3}^{km} + \theta_{1-3} B_1 + \theta_{3-1} B'_3 - (\Sigma r_B^*)_{1-3}^n\}, \\V_{1-4} &= \theta_{4-1} x_4 + \{(A_1 + A_2) S_{1-4}^{km} + \theta_{1-4} B_1 + \theta_{4-1} B'_4 - (\Sigma r_B^*)_{1-4}^n\}, \\&\dots\dots\dots \\V_{7-8} &= \theta_{7-8} x_7 + \theta_{8-7} x_8 + \{(A_7 + A_8) S_{7-8}^{km} + \theta_{7-8} B'_7 + \theta_{8-7} B'_8 - (\Sigma r_B^*)_{7-8}^n\},\end{aligned}\quad (15)$$

в которых x_J — поправки к значениям B'_J .

Перейдя затем к нормальным уравнениям и решив их в схеме Гаусса—Дулитля, находим x_J и поправки V_{JO} .

С учетом x_J были получены исправленные значения коэффициентов B_J , а по ним — расчетные углы рефракции

$$(r_B^*)_{JO}^p = A_J S_{JO}^{km} + B_J \theta_{JO}.$$

Вычисленные поправки V_{JO} к истинным суммам рассматривались как невязки в прямых и обратных расчетных углах рефракции, возникшие вследствие неучёта специфических метеорологических условий вдоль каждой линии визирования. Если на истинную сумму углов рефракции по линии JO приходилась поправка V_{JO} , то она распределялась на каждый из расчетных углов, составляющих эту сумму, по формулам:

$$\begin{aligned}\delta r_{JO} &= -\frac{V_{JO}}{\theta_{JO} + \theta_{OJ}} \theta_{JO}; & \delta r_{OJ} &= -\frac{V_{JO}}{\theta_{JO} + \theta_{OJ}} \theta_{OJ}; \\ \delta r_{JO} + \delta r_{OJ} &= -V_{JO} \text{ (контроль)}.\end{aligned}\quad (16)$$

Полученными по равенствам (16) поправками и были исправлены расчетные углы рефракции и определены их окончательные значения

$$r_{JO}^p = (r_B^*)_{JO}^p + \delta r_{JO}.$$

Эти значения сравнивались с истинными углами рефракции (см. таблицу).

По исправленным зенитным расстояниям

$$Z_{JO}^{\text{испр}} = Z'_{JO} + r_{JO}^p$$

были найдены превышения, а затем сеть уравнивали по способу последовательных приближений. На основании сравнения уравненных превышений с превышениями, полученными из геометрического нивелирова-

Таблица расчетных углов рефракции и отклонений их от истинных значений

Направление	r_{JO}^p	$(r_{в'}^n)_{JO}$	$\Delta = r_{JO}^p - (r_{в'}^n)_{JO}$	Направление	r_{JO}^p	$(r_{в'}^n)_{JO}$	$\Delta = r_{JO}^p - (r_{в'}^n)_{JO}$
1—6	+25",9	+23",5	+2",4	7—2	+26",0	+28",8	- 2",8
6—1	29 ,5	32 ,0	-2 ,5	2—6	38 ,0	27 ,4	+10 ,6
1—5	32 ,2	31 ,5	+0 ,7	6—2	20 ,7	31 ,4	-10 ,7
1—4	23 ,3	29 ,4	-6 ,1	3—4	17 ,9	18 ,1	- 0 ,2
5—1	31 ,4	32 ,1	-0 ,7	4—3	13 ,5	13 ,1	+ 0 ,4
4—1	28 ,5	22 ,4	+6 ,1	3—9	35 ,1	25 ,0	+10 ,1
1—3	18 ,6	24 ,9	-6 ,3	9—3	20 ,3	30 ,5	-10 ,2
3—1	28 ,4	22 ,1	+6 ,3	4—5	36 ,7	27 ,1	+ 9 ,6
2—3	28 ,4	29 ,9	-1 ,5	5—4	30 ,9	40 ,3	- 9 ,4
3—2	24 ,5	23 ,1	+1 ,4	5—6	30 ,7	31 ,5	- 0 ,8
2—9	32 ,8	30 ,8	+2 ,0	6—5	34 ,9	34 ,3	+ 0 ,6
9—2	24 ,9	26 ,6	-1 ,7	7—8	18 ,0	20 ,5	- 2 ,5
2—8	32 ,6	31 ,2	+1 ,4	8—7	23 ,5	20 ,8	+ 2 ,7
8—2	27 ,0	28 ,0	-1 ,0	8—9	19 ,4	19 ,1	+ 0 ,3
2—7	35 ,8	32 ,9	+2 ,9	9—8	17 ,6	17 ,8	- 0 ,2

ния, вычислена средняя квадратическая ошибка единицы веса и средняя квадратическая ошибка превышения вдоль линии длиной 1 км.

$$m_{1 \text{ км}} = \pm 2,54 \text{ см.}$$

Решенный пример показал, что расчетные углы рефракции оказались близкими к истинным их значениям. Однако по нескольким линиям (4—1, 3—1, 2—6, 3—9, 5—4) ошибки расчетных углов рефракции достигают 6—10", что, на наш взгляд, объясняется несоответствием рассматриваемой сети требованиям эксперимента. Основным итогом выполненной работы является разработка методики создания сети с рефракционными базисами и доказательство принципиальной возможности их построения.

Расчет точности таких сетей, экспериментальная проверка, детализация методики их построения и уравнивания — предмет дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Извеков М. М. К вопросу о тригонометрическом нивелировании в сетях триангуляций. — «Геодезия и картография», 1966, № 12.
2. Юношев Л. С. Боковая рефракция света при измерениях углов. М., «Недра», 1969.

Работа поступила в редколлегию 11 декабря 1971 года.
Рекомендована кафедрой геодезии Львовского сельскохозяйственного института.