УДК 528.21/22

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ

О НЕТРАДИЦИОННОМ ПОДХОДЕ К УСТАНОВЛЕНИЮ НОРМАЛЬНОЙ ЗЕМЛИ

В современной практике физической геодезии, как известно [10], возросли требования к точности элементов нормального поля силы тяжести на поверхности и вне Нормальной Земли. В связи с этим ставятся вопросы не только уточнения параметров Нормальной Земли, но даже пересмотра самого ее понятия и выбора (библиография приведена в [4, 10]). Не вдаваясь здесь в детализацию проблемы и предлагаемых путей ее решения, обсудим ее основные принципиальные предпосылки.

1. Совершенно очевидно, что при построении Нормальной Земли и развиваемого ею нормального поля следует учитывать богатейший объем имеющейся информации о планете, который к настоящему времени добыт как наземными, так и космическими методами и средствами изучения Земли и окружающего ее пространства.

2. Для целей геодезии Нормальной Земле, которая должна отражать главную часть всей планеты в целом, целесообразнее придавать форму эллипсоида вращения, чем «нормального геоида» [3] или «сфероида» [4, 6], тем более, что это уже давно реализуется практически. Последние построения Нормальной Земли (GRS-67 [11] и GRS-80 [12]) базируются на огромном объеме современных данных как космической, так и «наземной» геодезии; и эти «международные» эллипсоиды достаточно репрезентативно представляют форму реального геоида. Это, в частности, подтверждается расчетами [5], показавшими, что эллипсоид GRS-80 по своим размерам и форме является не чем иным, как устойчиво полученной наилучшей квадратической аппроксимацией геоида, соответствующего ряду моделей внешнего гравитационного поля (именно: SAO-5, SAO-6, GEM-10B). Значит, поверхность GRS-80 можно даже считать геоидом, генерализированным и сглаженным до эллипсоида, т. е. «эллипсоидальным» геоидом, понимаемым как главная часть действительного геоида. Заметим, что приведенный из [5] вывод получен там в результате решения геодезической обратной задачи теории потенциала [7], в которой по заданному внешнему потенциалу тела ищется его поверхность; в качестве дополнительной информации при этом использованы еще две константы: значение потенциала W_0 силы тяжести на геоиде и угловая скорость ω вращения Земли.

3. Если считать, что форма и размеры Нормальной Земли на данную эпоху получены достаточно уверенно, то аналогичное утверждение неправомочно отосительно развиваемого ею нормального поля. Последнее базируется на «постулате уровенности» нормального эллипсоида, который (постулат) отра-

жает в теоретическом плане характер наших знаний о планете в доспутниковую эпоху. Нормальный эллипсоид не может считаться уровенным, поскольку, во-первых, этому нет никаких обоснованных доказательств; во-вторых, это подтверждается простыми расчетами.

Геоид отклоняется от своей эллипсоидальной аппроксимации в пределах почти двухсот метров: наибольшие отступления геоида от эллипсоида GRS-80 это суть $\zeta_m = -110$ м («Индийский минимум») и $\zeta_M = +70$ м (максимум вблизи острова Новой Гвинеи). А на геоиде $W = \text{const} = W_0$. Значит, при переходе от одной из указанных поверхностей к другой, исходя из формулы $\frac{\partial W}{\partial n} = -g$, имеем на эллипсоиде потенциал, приблизительно равный $W_0 - g\zeta$, т. е. в точке Индийского минимума $W_0 + 108 \times 10$ м²/с², а в точке Гвинейского максимума $W_0 - 68 \cdot 10$ м²/с². Таким образом, потенциал силы тяжести на эллипсоиде Нормальной Земли изменяется с размахом $\Delta W = 176 \cdot 10$ м²/с². Однако потенциалу на эллипсоиде GRS-80 приписывается постоянное значение $U_0 = \text{const} = 62\,636\,860{,}85$ м²/с²; значит искажение реальности при этом составляет $\frac{\Delta W}{U_0} \approx \frac{1}{3500}$, или 0,003%, т. е. в два раза большее, чем изучаемая величина возмущающего потенциала $T \left(\frac{T}{W} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-5} \right)$. Искажение реальности за счет такого нормального потенциала желательно уменьшить. Этого можно достичь заменой уровенного нормального эллипсоида неуровенным.

Переходя к осуществлению этого, но при сохранении Нормальной Земли в форме эллипсоида вращения, например GRS-80, необходимо решить для него внешнюю задачу Неймана. При этом открывается возможность краевым условием охватить уже имеющуюся информацию о гравитационном поле Земли, к настоящему времени полученную по результатам измерений, выполненных на суше и в акваториях и представленную известными картами аномалий силы тяжести в пятиградусной или одноградусной разграфках. Приведем решение этой задачи.

Пусть эллипсоид вращения E (Oz — ось вращения) с полуосями (a, a, b) задан параметрически

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos u \cos \lambda \\ y &= a \cos u \sin \lambda \\ z &= b \sin u \end{aligned} \right\} \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \lambda < 2\pi \right), \tag{1}$$

где u — приведенная широта; λ — долгота; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — линейный эксцентриситет.

И пусть на E задана нормальная производная $\frac{\partial W}{\partial n}$ потенциала силы тяжести $W = U + Q$, где U — потенциал притяжения масс, расположенных внутри E, а Q — известный потенциал центробежной силы, действующей на произвольную точку (x, y, z) пространства за счет вращения E вокруг оси Oz с угловой скоростью ω.

Пользуясь подстановкой

$$a = c \operatorname{ch} \eta, \quad b = c \operatorname{sh} \eta, \tag{2}$$

отнесем пространство к триортогональной системе вырожденных эллипсоидальных координат (η, θ, λ) [9, 1]:

$$\left.\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \eta \sin \Theta \cos \lambda \\ y &= c \operatorname{ch} \eta \sin \Theta \sin \lambda \\ z &= c \operatorname{sh} \eta \cos \Theta \end{aligned}\right\} (0 \leqslant \eta < \infty, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \lambda < 2\pi), \tag{3}$$

где «полярное расстояние» $\theta = \frac{\pi}{2} - u$.

Координатные поверхности $\eta = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ — софокусные эллипсоиды вращения и гиперболоиды вращения вокруг оси Oz соответственно; $\lambda = \text{const}$ — плоскости, проходящие через ось Oz. Эллипсоиду E приписывается $\eta = \text{const} = \eta_0$, причем $sh\, \eta_0 = \frac{b}{c}$ (для земного эллипсоида $\operatorname{sh} \eta_0 \approx 12{,}5$).

Заметим, что

$$\operatorname{sh} \eta = \frac{1}{c} \sqrt{r^2 - c^2 \sin^2 \Theta}, \quad \operatorname{ch} \eta = \frac{1}{c} \sqrt{r^2 + c^2 \cos^2 \Theta}, \tag{4}$$

т. е. и $\operatorname{sh} \eta$ и $\operatorname{ch} \eta$ пропорциональны r — удалению точки (x, y, z) от начала координат.

Потенциал Q центробежной силы в этих координатах

$$Q = \frac{\omega^2}{2} c^2 \operatorname{ch}^2 \eta \sin^2 \Theta. \tag{5}$$

Задача ставится так. Найти вне E гармоническую функцию U, регулярную на бесконечности (потенциал масс, находящихся внутри E), если на E известна ее нормальная производная

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_E = f(\Theta, \lambda) = \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_E - \frac{ab\omega^2 \sin^2 \Theta}{\sqrt{b^2 + c^2 \cos^2 \Theta}}. \tag{6}$$

Если решение задачи искать в виде классического ряда вырожденных эллипсоидальных гармоник [2]

$$U(\eta, \Theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left.\begin{matrix} D_{nm} \\ E_{nm} \end{matrix}\right\} Q_n^m (i \operatorname{sh} \eta)\, P_n^m (\cos \Theta) \begin{cases} \cos m\lambda, \\ \sin m\lambda, \end{cases} \tag{7}$$

то можно показать, что для удовлетворения краевого условия коэффициенты D_{nm} и E_{nm} должны иметь следующие значения:

$$\left.\begin{matrix} D_{nm} \\ E_{nm} \end{matrix}\right\} = \frac{a}{[aQ_n^{m+1}(i \operatorname{sh} \eta_0) + mbQ_n^m (i \operatorname{sh} \eta_0)]} \begin{cases} A_{nm}, \\ B_{nm}, \end{cases} \tag{8}$$

где A_{nm} и B_{nm} коэффициенты разложения по сферическим гармоникам функции $F(\theta, \lambda)=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\cdot f(\theta, \lambda)$; при n четном коэффициенты D_{nm} и E_{nm} — чисто мнимые, но тогда и $Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)$ в (7) мнимые, т. е. все члены ряда (7) действительны при любых n и m.

Ряд (7) является равномерно сходящимся всюду вне E, если аналогичными свойствами обладает разложение $F(\theta, \lambda)$ в ряд сферических функций; по крайней мере при непрерывной $\left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_E$ ряд (7) вне E сходится равномерно.

Нормальное ускорение силы тяжести в произвольной точке вне E имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial n}=\frac{\partial U}{\partial n}+\frac{c\omega^2}{2}\frac{\operatorname{sh}2\eta\sin^2\Theta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\cos^2\Theta}}, \tag{9}$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left.\begin{matrix}A_{nm}\\B_{nm}\end{matrix}\right\}\frac{a\left[Q_n^{m+1}(i\operatorname{sh}\eta)+m\operatorname{th}\eta\, Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta)\right]}{c\left[aQ_n^{m+1}(i\operatorname{sh}\eta_0)+mbQ_n^m(i\operatorname{sh}\eta_0)\right]}\times$$

$$\times\frac{P_n^m(\cos\Theta)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\cos^2\Theta}}\left\{\begin{matrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{matrix}\right. . \tag{10}$$

Это выражение преобразуется на E в функцию, описывающую краевое условие.

Решение (7), (9) задачи Неймана для эллипсоида вращения позволяет теперь получить нормальное гравитационное поле планеты, отнесенное к неуровенному эллипсоиду. При этом в предварительном варианте его построения достаточно, очевидно, принять в краевом условии $-\left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_E=\gamma(\theta)=g$, где усредненные по широте значения ускорения силы тяжести g можно взять с карты Δg по пятиградусной разграфке, конечно, с пересчетом в них g с геоида на эллипсоид Нормальной Земли GRS-80. Если же g брать по карте Δg с одноградусной разграфкой и, естественно, сохранять в (7) тессеральные эллипсоидальные гармоники, то формулы (7) и (9) восстанавливают внешнее гравитационное поле Земли, соответствующее всей использованной при его построении наземной и спутниковой информации о нем.

В заключение отметим, что вопрос замены уровенного нормального эллипсоида неуровенным впервые (и, кажется, единожды) обсуждался Н. К. Мигалем [8] еще в 1949 году.

1. *Бровар В. В.* Потенциал притяжения планет произвольного сжатия // Астрономический вестник. 1976. Т. 10. № 4. С. 205—217. 2. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., 1952. 3. *Грушинский Н. П., Сагитов М. У., Чан Ван Няк.* Нормальный геоид. // Сообщ. Гос. Астрон. ин-та им. П. К. Штернберга. 1978. № 202—203. С. 49—62. 4. *Ме-

щеряков Г. А. О Нормальной Земле // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 43. С. 64—71. 5. *Мещеряков Г. А., Волжанин С. Д.* Использование метода Lp-оценок при определении параметров общеземного эллипсоида // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1983. Вып. 38. С. 76—81. 6. *Мещеряков Г. А., Агеев Н. Ф.* Предварительный вариант нетрадиционного нормального поля Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. Вып. 45. С. 58—62. 7. *Мещеряков Г. А.* Об определении физической поверхности Земли с использованием параметров геопотенциала, определяемых методами космической геодезии // Наблюдения искусственных спутников Земли. 1984. № 21. Ч. 1. С. 131—137. 8. *Мигаль Н. К.* Теория совместного определения фигуры и размеров Земли // Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. геодезическая. 1949. Вып. 15. № 1. С. 66. 9. *Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли // Тр. ЦНИИГАиК. 1960. Вып. 131. С. 251. 10. *Пеллинен Л. П., Нейман Ю. М.* Физическая геодезия // Итоги науки и техники. Сер. Геодезия и аэросъемка. М., 1980. Т. 18. 11. Geodetic Reference System 1967. Publication speciale du Bulletin Géodésique. Paris. 1970. P. 116. 12. *Moritz H.* Geodetic Reference System 1980 in the Geodesist's Handbook 1980. // Bulletin Géodésique. 1980. V. 54. N 3. P. 395—405.

Статья поступила в редколлегию 10. 04. 87