УДК 528.14/16

И. И. МОНИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ В РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДАХ УРАВНИВАНИЯ ПОЛИГОНОМЕТРИИ

Уравняем небольшую сеть полигонометрии (см. рисунок) различными методами. Неизвестными в уравнениях считаем относительные поправки в длины сторон $(S_i)/S_i$ и поправки в поворотные углы (i) в радианах. Чтобы не вводить веса измеренных величин, полагаем, что относительные ошибки измерения сторон равны ошибкам угловых измерений в радианах. Пусть длины сторон полигонометрии $S_i \approx 1$, а поворотные углы $i \approx 180, 120, 90, 60°$. Пункты a, 1, 4, b имеют известные координаты, а пункты 2 и 3 определяемые. В результате уравнивания вычислим вес P уравненных угла 3 и стороны S_2, а также числа А. А. Тьюринга, характеризующие устойчивость матриц нормальных уравнений. Ниже приведены результаты вычислений различными методами.

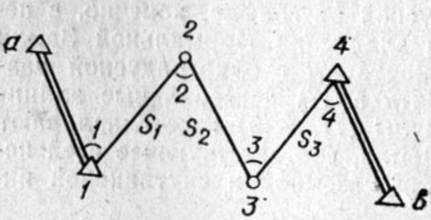

Схема сети полигонометрии.

Коррелатный метод. Напишем условные уравнения (1), матрицу коэффициентов при поправках (2), матрицу нормальных уравнений (3), обратную матрицу (4), формулу для вычисления веса (5) и чисел Тьюринга (6) при $i=180°$:

$$AV+W=0,$$

$$\sum_{1}^{4}(i)+W_1=0,\quad (1)+(2)+(3)+(4)+W_1=0,$$

$$\sum_{1}^{3}d\Delta x+W_x=0,\quad -3(1)-2(2)-3+W_2=0, \tag{1}$$

$$\sum_{1}^{3}d\Delta y+W_y=0,\quad (S_1)+(S_2)+(S_3)+W_3=0,$$

где $V^{\text{т}}=((1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(S_1)\,(S_2)\,(S_3))$ — матрица поправок; $d\Delta x$, $d\Delta y$ — поправки в приращения координат; (S_i) — относительные поправки в длины линий;

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix};\quad (2)\quad AA^{\text{т}}=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0\\ -6 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix};\quad (3)$$

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{10}{3}\end{pmatrix}=(AA^{\text{т}})^{-1}; \tag{4}$$

$$P_F^{-1}=f^{\text{т}}\{E-A^{\text{т}}(AA^{\text{т}})^{-1}A\}f, \tag{5}$$

где

$$f^{\text{т}}=\left(\frac{\partial F}{\partial 1}\frac{\partial F}{\partial 2}\cdots\frac{\partial F}{\partial S_3}\right);\quad f_3^{\text{т}}=(0010000);\quad f_{S_2}^{\text{т}}=(0000010)$$

$$M=nM(AA^{\text{т}})\,M(AA^{\text{т}})^{-1};\quad N=\frac{1}{n}N(AA^{\text{т}})\,N(AA^{\text{т}})^{-1}. \tag{6}$$

Здесь

$$M(AA^{\text{т}})=\max|a_{ik}|;\quad N(AA^{\text{т}})=\left(\sum_{ik}a_{ik}^2\right)^{1/2};$$

a_{ik} — элемент матрицы нормальных уравнений или обратной матрицы; n — порядок матрицы нормальных уравнений.

По формулам (5) и (6) получим

$$P_3^{-1}=0{,}70,\quad P_{S_2}^{-1}=0{,}67,\quad M=29{,}4,\quad N=5{,}2.$$

Параметрический метод. Составим уравнения поправок для углов и сторон при $i=180°$:

$$V=B\delta X+L,$$

$$V_i=dA_{23}-dA_{21}+L_i,\quad \begin{matrix}(1)=-\varepsilon_2,\\ (2)=2\varepsilon_2-\varepsilon_3,\end{matrix}$$

$$dA_{23} = a_{23}\varepsilon_2 + b_{23}\eta_2 - a_{23}\varepsilon_3 - b_{23}\eta_1, \quad (3) = -\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3,$$

$$(4) = -\varepsilon_3,$$

$$a_{23} = \frac{\Delta y_{23}}{S_{23}^2}, \quad b_{23} = -\frac{\Delta x_{23}}{S_{23}^2}, \quad (S_1) = +\eta_2,$$

$$(S_2) = -\eta_2 + \eta_3,$$

$$V_S = a'_{23}\varepsilon_2 + b'_{23}\eta_2 - a'_{23} - b'_{23}\eta_3 + L_S, \quad (S_3) = -\eta_3,$$

$$a'_{23} = -\frac{\Delta x_{23}}{S_{23}}, \quad b'_{23} = -\frac{\Delta y_{23}}{S_{23}}, \tag{7}$$

где

$$V^{\text{т}} = (V_i V_S) = ((1)(2)(3)(4)(S_1)(S_2)(S_3)); \quad \delta X = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \eta_2 \\ \varepsilon_3 \\ \eta_3 \end{pmatrix} -$$

поправки в координаты определяемых пунктов 2 и 3.

Свободные члены L не вычисляли. Напишем матрицу коэффициентов при поправках в координаты (8), матрицу нормальных уравнений (9), обратную матрицу (10), формулу для вычисления веса (11) и чисел Тьюринга (12):

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \ (8) \quad B^{\text{т}}B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \ (9)$$

$$(B^{\text{т}}B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \tag{10}$$

$$P_F^{-1} = f^{\text{т}} B (B^{\text{т}} B)^{-1} B^{\text{т}} f; \tag{11}$$

$$f_3^{\text{т}} = (0010000), \quad f_{S_2}^{\text{т}} = (0000010),$$

$$M = nM(B^{\text{т}}B)\,M(B^{\text{т}}B)^{-1}, \quad N = \frac{1}{n} N(B^{\text{т}}B)\,N(B^{\text{т}}B)^{-1}, \tag{12}$$

где n — порядок матрицы $B^{\text{т}}B$.

По формулам (11) и (12) найдем уравненные веса угла 3 и стороны S_2, а также числа Тьюринга:

$$P_3^{-1} = 0{,}70, \quad P_{S_2}^{-1} = 0{,}67, \quad M = 16, \quad N = 2{,}8.$$

Модифицированный метод *. Составим теперь условные уравнения в полигонометрии, пользуясь уравнениями поправок параметрического метода. Для этого последние разделим на уравнения для необходимых измерений и избыточных. Исключив в них поправки в координаты, получим условные уравнения

$$B_r B_t^{-1} V_t - V_r + L_r = 0, \text{ или } (B_r B_t^{-1}, -E)\begin{pmatrix} V_t \\ V_r \end{pmatrix} + L_r = 0, \quad (13)$$

где B_t, B_r — матрицы коэффициентов уравнений поправок необходимых и избыточных измерений. Выбор необходимых измерений не может быть произвольным. Он должен быть таким, чтобы координаты определялись наилучшим образом. Пусть необходимыми измерениями будут: углы 1 и 4 и стороны S_1, S_3. Уравнения поправок для них следующие:

$$(1) = -\xi_2, \quad (4) = -\xi_3, \quad (S_1) = \eta_2, \quad (S_3) = -\eta_3.$$

Избыточными измерениями в этом случае являются 2, 3 и S_2, а уравнения поправок для них

$$(2) = 2\xi_2 - \xi_3, \quad (3) = -\xi_2 + 2\xi_3, \quad (S_2) = -\eta_2 + \eta_3.$$

Напишем теперь матрицы B_t, B_t^{-1}, B_r и $B_r B_t^{-1}$.

$$B_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_t^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_r B_t^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условные уравнения (13) принимают вид

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1) \\ (4) \\ (S_1) \\ (S_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (2) \\ (3) \\ (S_2) \end{pmatrix} + L_r = 0,$$

или в обычной записи

$$\begin{aligned} -2(1) - (4) - (2) + W_1 &= 0, \\ (1) + 2(4) - (3) + W_2 &= 0, \\ (S_1) + (S_3) - (S_2) + W_3 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

* *Монин И. И.* Единый алгоритм составления условных уравнений в геодезических сетях // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1982. Вып. 35. С. 75—84.

Матрица нормальных уравнений в этом методе уравнивания получается такой:

$$(B_r B_t^{-1})(B_r B_t^{-1})^T + E = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

Значения чисел Тьюринга и обратных весов

Значение угла i, ... °	Метод уравнивания *	M	N	P_3^{-1}	$P_{S_2}^{-1}$
180	К	29,4	5,17	0,70	0,67
	П	16	2,85	0,70	0,67
	М	3,6	1,81	0,70	0,67
120	К	21,93	4,36	0,68	0,64
	П	12,42	2,66		
	М	5,33	1,88		
90	К	15,14	3,72	0,66	0,62
	П	9,25	2,20		
	М	4,5	1,61		
60	К	11,5	2,99	0,61	0,62
	П	6,54	0,80		
	М	3,54	1,34		

Примечание. Методы уравнивания: К — коррелатный, П — параметрический, М — модифицированный.

а обратная матрица

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Обратный вес и числа Тьюринга вычисляем по формулам коррелатного метода (5) и (6):

$$P_3^{-1} = 0{,}70, \quad P_{S_2}^{-1} = 0{,}67,$$

$$M = 3{,}6, \quad N = 1{,}8.$$

Покажем, как влияет на обусловленность матриц нормальных уравнений выбор необходимых измерений. Пусть необходимыми измерениями будут углы 1, 2 и стороны S_1 и S_2, а избыточными — 3, 4, S_3. На основе уравнений (7) легко получить элементы матриц

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_t, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B_r,$$

$$B_t^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_r B_t^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и условные уравнения (13)

$$5(1) - 2(2) - (3) + W_1 = 0,$$

$$-2(1) + (2) - (4) + W_2 = 0;$$

$$-(S_2) - (S_3) + W_3 = 0,$$

по которым нетрудно составить матрицу нормальных уравнений и обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

а по формулам (6) вычислить числа Тьюринга

$$M=60, \ N=11{,}36.$$

Следовательно, необходимые измерения для составления уравнений (13) надо выбирать так, как отмечалось ранее.

Не останавливаясь на подробных вычислениях, приведем сводную таблицу результатов обусловленности матриц нормальных уравнений и обратных весов уравненного угла 3 и стороны S_2 для сетей полигонометрии, когда углы поворота $i=180$, 120, 90 и 60°.

Таким образом, метод модифицированного алгоритма дает наиболее устойчивое решение задачи об уравнивании полигонометрии.

Статья поступила в редколлегию 27. 03. 87