УДК 528.16

Ю. В. МОРКОТУН

О ВЛИЯНИИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В ТРИАНГУЛЯЦИИ НА ОЦЕНКУ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ИЗМЕРЕННОГО УГЛА

Можно выделить две формулы, особенно широко применяемые для оценки качества измерений в триангуляции:
1) формула Ферреро

$$m_\beta = \sqrt{\frac{w^{\mathrm{T}} w}{3n}}; \tag{1}$$

2) формула, использующая результаты уравнивания

$$m_\beta = \sqrt{\frac{v^{\mathrm{T}} v}{r}}, \tag{2}$$

где w — вектор свободных членов условий фигур (треугольников); n — количество треугольников сети; v — вектор поправок измеренных углов из результатов уравнивания; r — количество условий в сети.

Между угловыми невязками w, как и между измеренными углами в триангуляции, существует корреляционная зависимость.

Так, угловые невязки смежных треугольников корреляционно зависят от коэффициента корреляции, равного — 1/3 [3], а угловые невязки перекрывающихся треугольников геодезического четырехугольника от коэффициента корреляции, равного 1/3. Измеренные углы, имеющие общее направление, находятся в корреляционной зависимости с коэффициентом корреляции, равным — 0,5 [1]. Это характерно как для измерения углов методом круговых приемов, так и для метода во всех комбинациях. Поэтому, исходя из принципов обобщенного метода наименьших квадратов, который учитывает при математической обработке корреляционные связи, формулы (1) и (2) перепишем в виде

$$m'_{\beta}=\sqrt{\frac{w^{\text{т}} Q_{W}^{-1} w}{3n}}; \quad (3) \qquad m'_{\beta}=\sqrt{\frac{v^{\text{т}} Q_{\beta}^{-1} v}{r}}, \quad (4)$$

где Q_W — корреляционная матрица угловых невязок треугольников триангуляции; Q_β — корреляционная матрица измеренных углов.

Корреляционная зависимость между угловыми невязками и измеренными углами в подавляющем большинстве случаев при оценке не учитывается, т. е. средняя квадратическая ошибка измеренного угла в триангуляции оценивается по формулам (1) и (2), а не по (3) и (4), что ведет к искажению оценки.

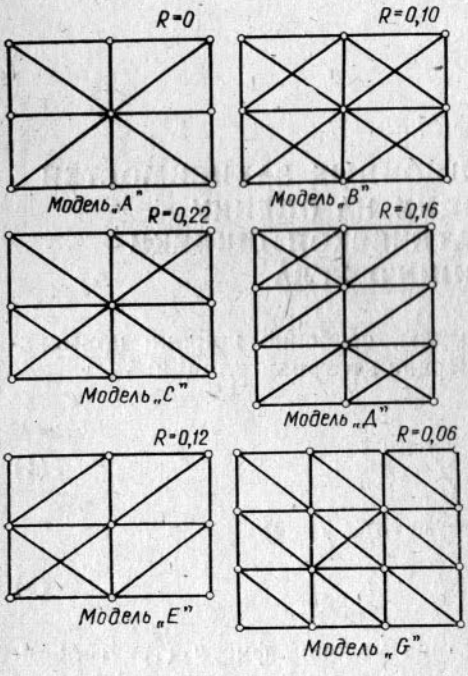

Рис. 1. Модели сетей триангуляции с различной долей треугольников геодезических четырехугольников.

В нашей статье мы рассматриваем отличие m_β от m_β' и в случае оценки по ф. Ферреро, и по формуле, использующей результаты уравнивания. В качестве показателя искаженности примем величину

$$L=\frac{|m_\beta-m'_\beta|}{m_\beta}\cdot 100\,\%. \quad (5)$$

L — искаженность в процентах от оценки m_β, не учитывающей корреляционные зависимости.

1. Влияние корреляционной зависимости угловых невязок треугольников триангуляции на оценку m_β по формуле Ферреро.

Данная проблема широко рассмотрена в [2], но в ней проанализированы сети, состоящие только из треугольников. Поэтому мы рассмотрим эту проблему в аспекте наличия в сети геодезических четырехугольников, так как «сплошная» корреляционная зависимость между угловыми невязками треугольников геодезического четырехугольника может существенно повлиять на величину оценки m_β.

Модели сетей, приведенные на рис. 1, выбирали с учетом нарастания величины R (6), которая является отношением количества пересекающихся сторон в сети триангуляции к количеству всех сторон сети. Для каждой модели мы моделировали (выбирали из реальных сплошных сетей триангуляции 2 класса, что придавало величинам w необходимую исходную корреляционную зависимость) по пять вариантов векторов w, затем получали по пять вариантов m_β с учетом (3) и без учета (1) корреляционных зависимостей между угловыми невязками треугольников:

$$R = l/N. \tag{6}$$

Здесь l — количество пересекающихся сторон в сети триангуляции; N — количество всех сторон сети.

Нужно отметить, что для каждого геодезического четырехугольника моделировались только три независимые невязки w, так как использование четвертой приведет к вырожденности матрицы Q_W ($\det Q_W = 0$) и формула (3) окажется математически не корректной.

После вычисления m_β по (3) и (1) для каждого варианта определяли величину L, а также величину $L_{ср}$ из всех пяти вариантов. Обобщенные результаты приведены ниже:

Модель	R	$L_{ср}$, %
A	0	6,5
B	0,40	40,0
C	0,22	18,2
D	0,16	25,9
E	0,12	14,6
G	0,06	7,7

Как видим, искаженность $L_{ср}$ прямопропорциональна и приблизительно равна величине R. Необходимо отметить, что в подавляющем большинстве случаев учет корреляционной зависимости увеличивал величину m_β.

2. Влияние корреляционной зависимости измеренных углов на точность оценки m_β по результатам уравнивания.

В качестве моделей мы выбирали различные схемы небольших локальных сетей триангуляции, а также прямые и обратные засечки (рис. 2). Для каждой модели сети моделировали по десять вариантов поправок измеренных направлений, а из них определяли поправки измеренных углов. Такая схема моделирования необходима для достижения корреляционной зависимости поправок углов ($z = -0{,}5$). Для каждого варианта вектора поправок каждой модели по формулам (2) и (4) вычисляли m_β и m_β', а также величину L для каждого варианта (всего 60 величин m_β, m_β' и L). Из десяти L каждой модели вычисляли $L_{ср}$. Обобщенные данные $L_{ср}$ для каждой модели приведены ниже:

Номер модели	$L_{ср}$, %
1	7,4
2	8,5
3	8,8
4	14,0
5	18,2
6	20,1

Необходимо отметить, что учет корреляционной зависимости в 60% случаев увеличивал среднюю квадратическую ошибку из-

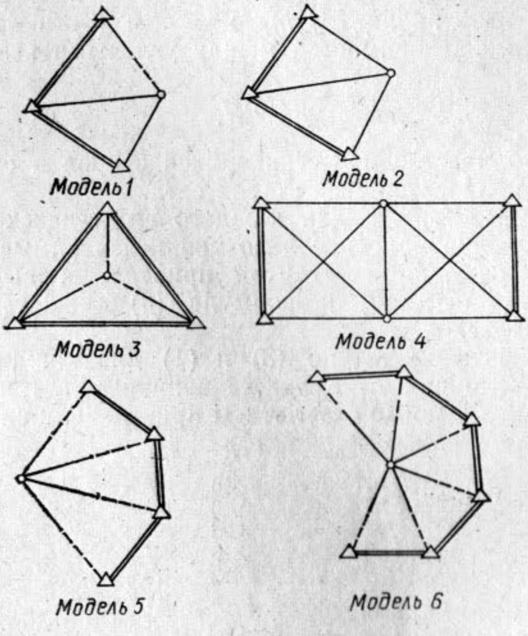

Рис. 2. Модель сетей триангуляции.

меренного угла. Особенно сильно корреляционная зависимость влияет на оценку m_β в сетях с большим числом пар зависимых углов (обратные засечки, сети из геодезических четырехугольников).

Исходя из приведенных результатов исследований, формулы (1) и (3) перепишем в виде

$$m_\beta = q_1 \sqrt{\frac{w^{\mathrm{T}} w}{3n}}, \quad q_1 \approx R + 1{,}05; \tag{7}$$

$$m_\beta = q_2 \sqrt{\frac{v^{\mathrm{T}} v}{r}}, \quad 1 \leqslant q_2 \leqslant 1{,}20. \tag{8}$$

Величины q_1 и q_2 нужно выбирать для каждой конкретной локальной сети триангуляции согласно приведенным выводам.

Обобщая данные исследований, необходимо сделать два основных вывода: во-первых, учет корреляционных зависимостей желателен и в некоторых случаях (при наличии в сети большого числа четырехугольников, высокой степени автокоррелированности элементов вектора измеренных углов) необходим; во-вторых, учет корреляционной зависимости в большинстве случаев увеличивал величину оценки, а это означает, что игнорируя корреляционные зависимости мы сознательно завышаем действительное качество измерений.

1. *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* Городская полигонометрия. М., 1979. 2. *Маркузе Ю. И.* Исследование о формуле Ферреро // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1982. Вып. 5. С. 5—12. 3. *Михайлович К.* Геодезия. М., 1984.

Статья поступила в редколлегию 10. 04. 87