

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНОЙ НЕВЯЗКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

При построении инженерных геодезических сетей специального назначения часто возникает необходимость в жестком контроле результатов измерений для обнаружения систематического влияния, изменяющего дисперсии измеряемых величин или их математические ожидания. Ограниченные возможности контроля по внутренней сходимости связаны именно с невозможностью обнаружения систематических ошибок, поэтому контроль измерений по значениям невязок является наиболее надежным методом оценки их качества. Допустимые невязки рассчитывают обычно, исходя из независимости и нормальности ошибок измерений, принимая в качестве предельных двойную (вероятность 95%) или тройную ошибки.

Однако в геодезической практике до настоящего времени не принято рассматривать систему невязок в совокупности и тем самым применять критерии случайности ряда наблюдаемых величин. Наиболее удобен для этой цели χ^2 -критерий, позволяющий вычислять сумму квадратов нормированных стандартами случайных величин, имеющую центральное χ^2 -распределение. Попадание вычисленной суммы квадратов в критическую область с принятой вероятностью интерпретируется как неравенство нулю математического ожидания ошибок (систематическое влияние) или как увеличение стандартных ошибок, т. е. понижение точности измерений. Непосредственному применению этой процедуры препятствуют два обстоятельства — невязки не являются независимыми, так как обычно включают общие измерения; при составлении условных уравнений возможны неравноценные варианты.

Задача, следовательно, заключается в разработке такой методики комплексного оценивания качества измерений по невязкам, чтобы конечные оценки не зависели от избранного варианта систе-

мы условных уравнений, а определялись бы только наличными результатами измерений. Формально задачу решают преобразованием вектора измеренных величин l размера n в вектор невязок v размера m при условии минимума дисперсий. Как известно, если $m \leq n$, это преобразование единственно и применяется для уравнивания измерений. Таким образом можно найти наилучшие (в смысле способа наименьших квадратов) оценки свободных членов условных уравнений, например, параметрическим способом, а затем проверить гипотезу нулевого математического ожидания вектора оценок. Заметим, что предположение нормальности ошибок измерений не имеет в наших рассуждениях принципиального значения, так как вместо оценок по методу наименьших квадратов следует брать оценки по методу максимального правдоподобия, а вместо χ^2 -распределения, другие, соответствующие исходному. Но, как известно, при должной организации измерений ошибки их достаточно хорошо описываются именно нормальным распределением, все допуски и последующее применение способа наименьших квадратов при уравнивании предполагает нормальность ошибок.

Итак, пусть вектор «измеренных» величин (все исходные величины: координаты, углы, расстояния и пр.) имеет ковариационную матрицу K_{ll} . Найдем матрицу производных вектора свободных членов v по вектору «измеренных» величин l

$$A = \frac{\partial v}{\partial l}, \quad (1)$$

размера $(m \times n)$ и вычислим ковариационную и весовую матрицы вектора невязок

$$K_{vv} = A \cdot K_{ll} \cdot A^T; \quad (2)$$

$$P_{vv} = (A \cdot K_{ll} \cdot A^T)^{-1}. \quad (3)$$

Применяя параметрический способ, вычислим уравненные значения вектора свободных членов

$$\bar{v} = \tilde{v} + (B^T \cdot K_{ll}^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot K_{ll}^{-1} \cdot (l - \tilde{l}), \quad (4)$$

где $\tilde{v}$ — вектор приближенных значений невязок; $\tilde{l}$ — вектор приближенных значений «измеренных» величин, соответствующий вектору $\tilde{v}$; B — матрица производных $\frac{\partial l}{\partial v}$ размера $(n \times m)$.

Весовая матрица уравненного вектора невязок $\bar{v}$ имеет вид

$$Q_{\bar{v}\bar{v}} = (B^T \cdot K_{ll}^{-1} \cdot B). \quad (5)$$

Пользуясь тем, что вес среднего значения является суммарным, можно записать

$$\frac{\det(B^T \cdot K_{ll}^{-1} \cdot B)}{\det(A \cdot K_{ll} \cdot A^T)^{-1}} \geq 1, \quad (6)$$

так как определитель весовой матрицы случайного вектора равен квадрату его обобщенного веса [1].

Для построения критической области вектора v найдем квадрат его полной нормированной длины

$$\chi^2 = v^T \cdot P_{vv} \cdot v, \quad (7)$$

который имеет χ^2 -распределение с числом степеней свободы m , равным его размерности. В соответствии с этим гипотеза о нулевом математическом ожидании вектора v принимается с вероятностью $P_\alpha = (1-\alpha)$, если наблюдаемое значение квадрата нормированной длины вектора средних невязок больше критического значения, определяемого по таблицам χ^2 -распределения с уровнем значимости α при числе степеней свободы m .

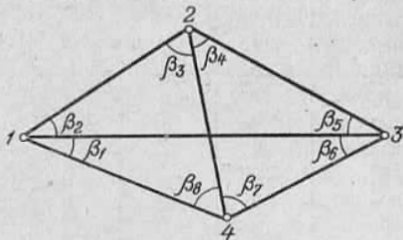


Схема сети.

$$M[v] = 0, \text{ если } \bar{v}^T \cdot P_{\bar{v}\bar{v}} \cdot \bar{v} \leq \chi^2_{\alpha; m}. \quad (8)$$

Следует заметить, что вектору $\bar{v}$ соответствует весовая матрица $P_{\bar{v}\bar{v}}$ и, следовательно, наблюдаемое значение квадрата полной нормированной невязки сети не зависит от избранного вида системы условных уравнений. Это означает, что полная невязка полигонометрического хода останется неизменной независимо от того, вычислялась она по измеренным или предварительно исправленным величинам и в какой бы точке она ни вычислялась.

Как видим, условие (8) универсально, вычисляемый квадрат абсолютной невязки — величина безразмерная (отвлеченная) и, следовательно, не зависит от вида (размерностей) измеренных в геодезической сети величин. К тому же применение параметрического способа позволяет учесть и ковариационную матрицу «исходных данных» (дирекционных углов, координат и т. п.).

Рассмотрим пример использования описанной методики для расчета полной невязки сети (см. рисунок). Восемь углов геодезического четырехугольника получены из независимо измеренных направлений с дисперсией каждого направления, равной $\sigma^2 = 0,5 \times 10^{-10}$ рад. Ковариационная матрица измеренных углов приведена в табл. 1 в масштабе 1×10^{10} . При этом дисперсии измеренных углов равны 1, а ковариации смежных углов равны $-0,5$.

Значения «измеренных» углов и их истинные значения приведены в табл. 2. Нормальные ошибки измеренных направлений взяты из таблицы нормальных случайных ошибок [1].

Составим четыре уравнения невязок

$$\beta_1 + \beta_5 + \beta_7 + \beta_8 - \pi = v_1,$$

$$\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 - \pi = v_2,$$

$$\beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 - \pi = v_3,$$

$$\frac{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_3 \cdot \sin \beta_5 \cdot \sin \beta_7}{\sin \beta_2 \cdot \sin \beta_4 \cdot \sin \beta_6 \cdot \sin \beta_8} - 1 = v_4.$$

Таблица 1

Ковариационная матрица измеренных величин

l	l^T							
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8
β_1	1	-0,5	0	0	0	0	0	0
β_2	-0,5	1	0	0	0	0	0	0
β_3	0	0	1	-0,5	0	0	0	0
β_4	0	0	-0,5	1	0	0	0	0
β_5	0	0	0	0	1	-0,5	0	0
β_6	0,0	0	0	0	-0,5	1	0	0
β_7	0	0	0	0	0	0	1	-0,5
β_8	0	0	0	0	0	0	-0,5	1

Таблица 2

Ошибки направлений и измеренные углы

Точки	Направления	Ошибки (10^{-5} рад)	Углы β	Ошибки углов	„Измеренные“ углы	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{ctg} \beta$
1	1—2	0,33	β_2	0,07	0,284731134	0,293	3,413
	1—3	0,40	β_1	-0,71	0,523912243	0,579	1,727
	1—4	-0,31					
2	2—3	-0,63	β_4	-0,56	1,107143121	1,999	0,500
	2—4	0,07	β_3	-0,33	1,390938526	5,502	0,182
	2—1	-0,26					
3	3—4	1,48	β_6	-1,00	0,748368038	0,928	1,078
	3—1	-0,48	β_5	1,16	0,358782268	0,375	2,267
	3—2	1,64					
4	4—1	1,98	β_8	-1,15	0,941997531	1,375	0,727
	4—2	0,83	β_7	-0,25	0,927283715	1,333	0,750
	4—3	0,58					

Значения производных невязок по измеренным величинам приведены в табл. 3. В последнем столбце этой таблицы приведены и невязки в масштабе 1×10^5 . Применяя (3), получим весовую матрицу невязок сети (табл. 4). Для принятых четырех невязок вычислим наблюдаемое значение χ^2 -критерия

$$v^T \cdot P_{vv} \cdot v = 3,90,$$

Производные невязок по углам и невязки сети

v	∂T								v
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	
v_1	1	0	0	0	0	1	1	1	-3,11
v_2	0	1	1	1	1	0	0	0	0,34
v_3	0	0	0	1	1	1	1	0	-1,55
v_4	1,727	-3,416	-0,182	-0,500	2,267	-1,078	0,750	-0,727	2,22

а при $P_\alpha=0,95$ и $m=4$ критическое значение $\chi^2_{0,95;4}=9,49$ и наблюдаемые невязки следует считать допустимыми. Но избранный вариант невязок не единственный и не учитывает всех возможных их комбинаций. Как известно, например, при составлении полюсного условия не все варианты равноценны, а приведенный в примере не лучший. Поэтому найдем средние невязки параметрическим способом. Примем приближенные значения невязок $\bar{v}_1=0$ и $\bar{v}_2=0$. Эти значения получены при условии, что приближенные

Таблица 4

Весовая матрица невязок сети

v	vT			
	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0,25	0,07	-0,19	-0,01
v_2	0,07	0,35	-0,24	-0,06
v_3	-0,19	-0,24	0,41	0,04
v_4	-0,01	-0,06	0,04	0,04

значения углов $\beta_1 \dots \beta_4$ и β_6, β_7 равны измеренным, а β_5 и β_8 приняты такими, что обеспечивают нулевые невязки $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$. Следовательно, приближенное значение невязки $\bar{v}_3=1,79$, а полюсного условия $\bar{v}_4=-0,67$.

Матрица производных измеренных углов по невязкам приведена в табл. 5 (величины их обратны производным из табл. 2). В последнем столбце табл. 5 приведены разности измеренных и приближенных значений углов. По формулам (4) и (6) вычисляем поправки в приближенные значения невязок и весовую матрицу средних невязок сети (табл. 6), а применив (7), получаем квадрат полной средней невязки сети, который составляет $\chi^2=32,10$ и тем самым превышает критическое значение, свидетельствуя о наличии систематических ошибок в измеренных направлениях. Вычислим квадрат полной невязки сети, составив полюсное условие

$$\frac{\sin 5 \cdot \sin (7+8) \cdot \sin 3}{\sin (3+4) \cdot \sin 6 \cdot \sin 8} - 1 = v_4,$$

а первые три условия оставим теми же, что и в предыдущем примере. При этом полюсном условии и прежних приближенных значениях углов приближенное значение невязки $\bar{v}_4 = -0,47 \times 10^{-5}$, а последний столбец табл. 5 изменится в соответствии с новыми производными измеренных углов по невязке полюсного условия, и изменятся средние невязки и их весовая матрица. В этом ва-

Таблица 5

Матрица производных углов по невязкам сети

l	v^T				$(l-\bar{l})$
	v_1	v_2	v_3	v_4	
β_1	1	0	0	0,579	0
β_2	0	1	0	-0,293	0
β_3	0	1	0	5,502	0
β_4	0	1	1	-1,999	0
β_5	0	1	1	0,375	0,2376
β_6	1	0	1	-0,928	0
β_7	1	0	1	1,333	0
β_8	1	0	0	-1,375	-3,1152

Таблица 6

Весовая матрица средних невязок сети и средние невязки

v	v^T			
	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	6,67	1,33	4,00	-0,50
v_2	1,33	6,67	4,00	6,88
v_3	4,00	4,00	6,67	0,76
v_4	-0,50	6,88	0,76	34,68
$\bar{v}^T$	0	0	1,7911	-0,6735
∂v^T	-1,2109	-0,1223	0,5570	0,0790
$\bar{v}^T$	-1,2109	-0,1223	2,3781	-0,5945

рианте условных уравнений весовая матрица средних невязок и сами невязки иные (табл. 7), но квадрат полной невязки сети остается прежним $\chi^2 = 31,88$.

Таблица 7

Весовая матрица второго варианта средних невязок сети

v	v^T			
	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	6,67	1,33	4,00	-16,74
v_2	1,33	5,67	4,00	13,89
v_3	4,00	4,00	6,67	-3,35
v_4	-16,74	13,89	-3,35	122,64
$\bar{v}^T$	0	0	1,79	-0,47
∂v^T	-0,58	-0,70	0,64	0,23
$\bar{v}^T$	-0,58	-0,70	2,43	-0,24

Таким образом, метод расчета полной невязки геодезической сети включает разнородные измерения. Усредненная (в смысле наименьших квадратов) полная невязка сети не зависит от избранной системы условных уравнений. Квадрат абсолютной невязки геодезической сети можно использовать для обнаружения систематического влияния ошибок измеренных величин.

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1970. — 720 с.
2. Лошкарев Н. А., Перепечкин А. А. Применение χ^2 -критерия для построения критической области многомерных случайных векторов невязок и смещений точек. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 40, с. 51—58.

Статья поступила в редколлегию 21. 04. 84