

а первые три условия оставим теми же, что и в предыдущем примере. При этом полное условие и прежних приближенных значений углов приближенное значение невязки $\bar{v}_4 = -0,47 \times 10^{-5}$, а последний столбец табл. 5 изменится в соответствии с новыми производными измеренных углов по невязке полного условия, и изменятся средние невязки и их весовая матрица. В этом ва-

Таблица 5
Матрица производных углов по невязкам сети

l	$\frac{\partial T}{\partial v}$			$(l-l)$	$\frac{\partial T}{\partial v}$			
	v_1	v_2	v_3		v_1	v_2	v_3	v_4
P_1	1	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	1	0	-0,293	0	0	0	0
P_3	0	1	0	5,502	0	0	0	0
P_4	0	1	1	-1,999	0	0	0	0
P_5	0	1	1	0,375	0,2376	0	0	0
P_6	1	0	1	-0,928	0	0	0	0
P_7	1	0	1	1,333	0	0	0	0
P_8	1	0	0	-1,375	-3,1152	0	0	0

Таблица 6
Весовая матрица средних невязок сети и средние невязки

v	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	6,67	1,33	4,00	-0,50
v_2	1,33	6,67	4,00	6,88
v_3	4,00	4,00	6,67	0,76
v_4	-0,50	6,88	0,76	34,68

рианте условных уравнений весовая матрица средних невязок и сами невязки иные (табл. 7), но квадрат полной невязки сети остается прежним $\chi^2 = 31,88$.

Таблица 7
Весовая матрица второго варианта средних невязок сети

v	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	6,67	1,33	4,00	-16,74
v_2	1,33	5,67	4,00	-13,89
v_3	4,00	6,67	3,35	-3,35
v_4	-16,74	13,89	-3,35	122,64

Таким образом, метод расчета полной невязки геодезической сети включает разнообразные измерения. Усредненная (в смысле наименьших квадратов) полная невязка сети не зависит от избранной системы условных уравнений. Квадрат абсолютной невязки геодезической сети можно использовать для обнаружения систематического влияния ошибок измеренных величин.

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1970. — 720 с.
2. Довжак Н. А., Переяскин А. А. Применение χ^2 -критерия для построения критической области многомерных случайных векторов невязок и смещений точек. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 40, с. 51—58.

Статья поступила в редакцию 21. 04. 84

УДК 528.11+519.281.2

Б. Ф. МАГУСКИН

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИНЦИПА НАИБОЛЬШЕГО ВЕСА

В настоящее время при обосновании методов математической обработки наблюдений широко применяется метод максимального правдоподобия или другие способы, являющиеся развитием первого Гауссовского обоснования метода наименьших квадратов. Второе же обоснование Гаусса, основанное на принципе наибольшего веса, используется все реже. Некоторое объяснение этому явлению, по-видимому, может дать анализ современного состояния принципа наибольшего веса. Результаты такого анализа могут также представлять самостоятельный интерес, поскольку и сейчас имеется много сторонников второго обоснования. Широко распространено ошибочное представление о безупречности этого обоснования. Цель настоящей статьи — показать, что обоснование принципа наибольшего веса имеет существенный недостаток, который не был устранен дальнейшими исследованиями. Попутно сделаны некоторые обобщения в основной теореме.

В большинстве случаев основная задача математической обработки наблюдений заключается в следующем. Измерены n функций от k искомого неизвестных ($k < n$). Требуется определить наилучшие значения неизвестных, т. е. такие значения, которые по возможности содержат наименьшие в том или ином смысле ошибки.

Принцип наибольшего веса, применяемый для решения этой задачи, заключается в требовании, чтобы полученные значения неизвестных обладали наибольшим весом. Как известно, под весом понимается величина, обратно пропорциональная дисперсии результатов измерений

$$p = \sigma_0^2 / \sigma^2, \quad (1)$$

где p — вес; σ^2 — дисперсия; σ_0^2 численно равна дисперсии измерений, вес которых принят равным единице. Эта величина может быть как размерной, так и безразмерной [2].

Своим возникновением принцип наибольшего веса, как уже говорилось, обязан Гауссу. В 1821 г. была опубликована знаменитая Гауссовская «Теория комбинаций наблюдений», подтвержденных наименьшим ошибкам», в которой излагается второе обоснование, основанное на принципе наибольшего веса. Таким образом,

Гаусс отказался от своего первого обоснования в пользу второго. Сам он пишет по этому поводу в письме к Бесселю: «То, что впоследствии оказалось от метафизики способом наименьших квадратов, приведенной в «Теории движения», произошло, главным образом, по причине, о которой я сам публично не упоминал. Имен-но, я считаю менее важным отыскание такого значения неизвест-ной величины, вероятность которой максимальна, но всегда оста-ется бесконечно малой, нежели того, с которым можно получить верную игру; иными словами, если $f(a)$ обозначает вероятность значения a для неизвестного x , то представляется менее важным привести к максимуму $f(a)$, нежели к минимуму интеграл $\int f(x) \times \times F(x-a) dx$, распространенный на все возможные значения x , в котором за F берется функция всегда положительная и подходя-щим образом увеличивающаяся» [1].

Принцип наибольшего веса базируется на понятии дисперсии ошибки (Гаусс называет ее квадратом средней ошибки). Из двух систем наблюдений точнее та (в заданном смысле), для которой дисперсия погрешностей меньше. Гаусс указывает [3] на произ-вольность такого подхода и на его преимущества: «Подобно тому

как интеграл $\int \varphi(x) dx$ (через $\varphi(x)$ обозначена плотность вероят-ности ошибки x . — *Б. М.*), или среднее значение x , указывает или на наличие, или на отсутствие систематической ошибки и на зна-чение ее, так и интеграл $\int x^2 \varphi(x) dx$ в пределах от $x = -\infty$ до

$x = +\infty$ (или среднее значение x^2) указывает наилучшим образом на надежность наблюдений как с точки зрения определения их, так и измерения. Поэтому из двух систем неравноточных наблю-дений надо считать более точными те, для которых интеграл

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx$ принимает меньшее значение. Если кто-нибудь воз-

разит, что этот принцип принят произвольно, без особой для того надобности, то мы охотно с этим согласимся. Интересующий нас вопрос по самой своей природе содержит в себе нечто неопределен-ное, что может быть ограничено известными пределами и в неко-торой степени произвольным правилом. Определение из наблю-дений какой-либо величины, содержащей более или менее крупные ошибки, вполне возможно сравнить с игрой на счастье, в которой можно только проигрывать, но не выигрывать, в которой, следо-вательно, каждая ожидаемая ошибка соответствует проигрышу. Риск в такой игре оценивается по вероятному проигрышу, то есть по сумме произведений отдельных возможных проигрышей на со-ответствующие их вероятности. Но какому проигрышу нужно при-равнять отдельную ошибку наблюдений, это остается отнюдь не-

ясным; решение, как лучше поступить, зависит частично от на-шего произвола. Очевидно, не следует приравнять проигрыш самой ошибки; если, однако, положительные ошибки принимаются за проигрыш, то отрицательные должны представлять собой вы-игрыш. Величина проигрыша должна быть выражена такой положи-тельной ошибкой, которая по природе своей всегда остается положи-тельной. При бесконечном многообразии таких функций, простей-шей, обладающей таким свойством и заслуживающей предпочтене-ния перед другими, несомненно, является квадратичная функция.

Итак, высказанный нами выше принцип оправдался. Дальнейшие доказательства Гаусса во «втором методе» заклю-чаются в решении указанной в начале основной задачи математи-ческой обработки наблюдений, исходя из принципа наибольшего веса (или, что то же самое, из принципа наименьшей дисперсии). Результаты решения получаются в виде системы нормальных урав-нений относительно искомым неизвестных. К такому же резуль-тату приводит метод наименьших квадратов. Этим и доказывае-ся, правомерность последнего. В ходе всего доказательства считается, что результаты измерений независимы и не содержат системати-ческих ошибок.

Академик А. А. Марков, критически рассмотрев все направле-ния обоснования метода наименьших квадратов, остановил свой выбор на втором обосновании Гаусса и усовершенствовал его [8]. Марков исходил из тех же концепций, что и Гаусс. Однако в от-личие от Гаусса Марков линейные комбинации результатов на-блюдений называет приближенными равенствами, достоинство же каждого приближенного равенства оценивается его весом.

В 1938 г. Ф. Давидом и Ю. Нейманом была опубликована статья «Обобщение теоремы Маркова о наименьших квадратах» [10], в которой авторы обобщили основную задачу математиче-ской обработки наблюдений, поставив в качестве задачи опре-деление наилучших значений не неизвестных, а их линейной функ-ции

$$u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n. \quad (2)$$

Определение наилучших значений неизвестных при этом можно представить в виде частного случая такой более общей задачи (когда число функций u равно k и каждая j -я функция имеет вид $u(j) = x_j$). Решение обобщенной основной задачи авторы оформили в виде теоремы, которую назвали обобщенной теоремой Маркова.

Наконец, в 1964 г. Ю. В. Кемниц [4] расширил применение принципа наибольшего веса на зависимость наблюдений, доказав основную теорему обобщенного метода наименьших квадратов, а в 1972 г. Ю. И. Маркузе [9] распространил действие этого прин-ципа на измерения, имеющие вырожденную корреляционную мат-рицу. Заметим, что исследования в [9] носят в основном алге-браический характер, а поэтому результаты пригодны для управ-ливания при любом обосновании метода наименьших квадратов. Таким образом, обоснование принципа наибольшего веса в настоящее время состоит из четырех частей: рассуждений Гаусса,

непосредственно обобщающих применение принципа наименьшей дисперсии, обобщенной теоремы Маркова, теоремы Кемница и доказательства Маркузе. Из последних трех частей основное значение имеет обобщенная теорема Маркова. Как уже указывалось, последний вариант этой теоремы изложен в [10] Дэвидом и Нейманом. Приведем новый вариант доказательства теоремы Маркова (без той ее части, которая касается оценки точности), в котором в отличие от предыдущих изложение ведется в матричном исчислении; введено некоторое обобщение, заключающееся в том, что рассматривается задача определения наилучших значений одной функции, как это сделано в [10], а некоторой совокупности функций u^j ($j=1, 2, \dots, m$); измерения считаем зависимыми, что позволило объединить теоремы Маркова и Кемница, т. е. две части обоснования принципа наибольшего веса объединить в одну; использованы некоторые приемы, позволившие сократить доказательство.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, введем некоторые обозначения: M — знак математического ожидания; $D_{\bar{x}}$ — дисперсионная матрица того вектора, обозначение которого дано в виде индекса; G — матрица системы уравнений погрешностей; $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — вектор искомым неизвестных в основной задаче математической обработки наблюдений (T — знак транспонирования); $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)^T$ — вектор свободных членов в системе уравнений погрешностей; $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ — вектор поправок в результаты измерений; K — корреляционная матрица результатов измерений, т. е. матрица, диагональными элементами которой являются коэффициенты корреляции; P — матрица весов результатов измерений; A — матрица системы нормальных уравнений; $\bar{u} = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)})^T$ — вектор функций $u^{(j)}$; l_1 — вектор свободных членов нормальных уравнений.

Обобщенная теорема Маркова—Кемница. Если результаты измерений, вводимые в уравнивание, свободны от систематических ошибок, то наибольшим весом будут обладать значения функций u и по отдельности для того значения вектора $\bar{x}$, которое удовлетворяет системе нормальных уравнений

$$A\bar{x} + \bar{l}_1 = 0, \quad (3)$$

где матрица нормальных уравнений A и вектор свободных членов $\bar{l}_1$ описаны равенствами

$$A = G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} G, \quad (4) \quad \bar{l}_1 = G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} \bar{l}. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть задача уравнивания соответствует система уравнений погрешностей

$$G\bar{x} + \bar{l} = \bar{v}. \quad (6)$$

Точное соотношение, т. е. соотношение, имеющее место при отсутствии ошибок, имеет вид

$$G\bar{x} + \bar{l} = 0. \quad (7)$$

Матрица G имеет n строк и k столбцов, ранг ее равен k , поэтому матрица G имеет бесчисленное множество обратных матриц. Умножим уравнение (7) слева на одну из обратных матриц G^+ . Тогда получим

$$\bar{x} = -G^+ \bar{l}. \quad (8)$$

Пусть система функций $\bar{u}$ связана с вектором $\bar{x}$ уравнением

$$\bar{u} = U\bar{x}, \quad (9)$$

где U — матрица коэффициентов. Учитывая (8), получаем

$$\bar{u} = -UG^+ \bar{l}, \quad (10)$$

или при использовании обозначения

$$UG^+ = T \quad (11)$$

появится возможность записать это так:

$$\bar{u} = -T\bar{l}. \quad (12)$$

Согласно [5], дисперсионная матрица вектора $\bar{u}$ выражается через дисперсионную матрицу вектора $\bar{l}$ следующим образом:

$$D_{\bar{u}} = T D_{\bar{l}} T^T. \quad (13)$$

Так как

$$D_{\bar{l}} = \sigma_0^2 P^{-1/2} K P^{-1/2}, \quad (14)$$

где σ_0^2 — дисперсия единичных весов, то

$$D_{\bar{u}} = \sigma_0^2 T P^{-1/2} K P^{-1/2} T^T. \quad (15)$$

Принцип наибольшего веса требует минимизации каждого из диагональных элементов матрицы $D_{\bar{u}}$. Считая дисперсию единичных весов неизменной, видим, что необходимо потребовать минимизации каждого из диагональных элементов матрицы $T P^{-1/2} K P^{-1/2} T^T$ при учете (11).

Составим вспомогательную функцию Лагранжа

$$\Phi = T P^{-1/2} K P^{-1/2} T^T - (T G - U) L, \quad (16)$$

где L — матрица множителей Лагранжа.

Возьмем производные только от диагональных элементов матрицы Φ , что отметим индексом d в обозначении производной.

Поскольку для произвольных матриц A и B имеет место

$$\frac{d(AB)_d}{dA} = B,$$

то

$$\lim_{\Delta a_{ij} \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m [(a_{ij} + \Delta a_{ij}) b_{ji} - a_{ij} b_{ji}] \frac{\Delta a_{ij}}{\Delta a_{ij}} = b_{ji}.$$

* Матрица G^+ пока не определена.

то в нашем случае получим

$$\frac{d\Phi_d}{dT} = 2P^{-1/2} KP^{-1/2} T^T - 2GL = 0. \quad (17)$$

Отсюда

$$T^T = P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} GL,$$

или

$$T = L^T G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2}. \quad (18)$$

Подставим (19) в (11) и используем (4)

$$U = TG = L^T G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} G,$$

т. е.

$$L^T = UA^{-1}. \quad (20)$$

Таким образом,

$$T = UA^{-1} G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2}. \quad (21)$$

Поэтому, вспоминая (12), видим, что

$$\bar{u} = -UA^{-1} G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} \bar{L}. \quad (22)$$

Но в то же время для $\bar{u}$ справедливо (9). Стало быть,

$$\bar{x} = -A^{-1} G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} \bar{L}. \quad (24)$$

Легко видеть, что такое значение вектора $\bar{x}$ получается из решения системы нормальных уравнений (3) с матрицей (4) и вектором свободных членов (5). Теорема доказана.

Все изложенное показывает, что самым слабым методом обоснования принципа наибольшего веса является произвольность принятия этого принципа, на что указывал сам Гаусс. Совершенство последнего доказательства в целях обоснования метода наименьших квадратов не привело к устранению этого недостатка.

Представляется, что метод наименьших квадратов можно строго доказать только в том случае, если базироваться на понятии вероятнейшей оценки, которое дано в работах [6, 7].

1. *Базратни Г. В.* Введение. — В кн.: Гаусс К. Ф. Избранные геофизические сочинения. — М.: Изд-во геод. лит., 1957, т. 1, с. 3—15. 2. *Болдин В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений. — М.: Недра, 1977. — 368 с. 3. *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. — М.: Изд-во геод. лит., 1957, т. 1. — 152 с. 4. *Келли Ю. В.* К обоснованию методов (способов) наименьших квадратов. — Труды МИИЗ, 1964, вып. 22, с. 67—78. 5. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1958. 6. *Мазуркин Б. Ф.* О вероятнейшей оценке математического ожидания. — Геодезия и фотограмметрия в горном деле, 1978, вып. 5, с. 41—49. 7. *Мазуркин Б. Ф.* Еще раз о вероятнейшей оценке математического ожидания в многомерном случае. — Геодезия и фотограмметрия в горном деле, 1982, вып. 5, с. 38—50. 8. *Марков А. А.* Исчисление вероятностей. — СПб., 1900. — 400 с. 9. *Маркузе Ю. И.* Уравнение намерений с вырожденной корреляционной матрицей. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотограмметрия, 1972, вып. 3, с. 15—20. 10. *David F. N., Neuman J.* Extension of the Markoff Theorem on Least Squares. — Statistical Research Memoirs, 1938, № 1, p. 14—18.

Статья поступила в редакцию 17. 10. 82

УДК 528.33

М. И. МАРЫЧ О ТРАКТОВКЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Как известно, физическая поверхность Земли близка к сфере и измеренные на ней аномалии силы тяжести с практически достаточной точностью удовлетворяют простейшее граничное условие для возмущающего потенциала, приводящее в случае сферы к хорошо известному интегралу Стокса. Поэтому наиболее простым и эффективным методом решения данной краевой задачи является метод малого параметра, предложенный М. С. Молоденским [6].

Он заключается во введении коэффициента k ($0 \leq k \leq 1$) для всех высот $H = R - R$ рельефа краевой поверхности S , отсчитываемых от некоторой земной сферы с радиуса R без изменения названных выше аномалий Δg . Так как высоты H по сравнению с радиусом R являются малыми, то коэффициент k можно рассматривать как малый параметр. При этом краевая поверхность S и радиус-вектор $\rho' = R + H + z$ любой внешней точки становятся функциями от k , причем радиальное расстояние z от поверхности S до этой точки остается одинаковым при всех значениях k . Следовательно, функциями от k становятся оператор M_k граничного условия

$$M_k T \equiv - \left(\frac{\partial T}{\partial \rho'} + \frac{2T}{\rho'} \right)_{\rho' = R} = \Delta g \quad (1)$$

для возмущающего потенциала $T = T(\rho', \theta, \lambda)$ и обратный ему оператор M_k^{-1} . Решение задачи (операторного уравнения (1)) $T = M_k^{-1} \Delta g$ находят в виде степенного ряда

$$\bar{T} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n k^n, \quad (2)$$

выражающего при $k=1$ определяемый потенциал. Таким образом, вопрос заключается в получении формул для первых коэффициентов $T_n = (M_k^{-1})_n \Delta g$ ряда, число которых лимитируется точностью граничного условия (1), составляющей величину приблизительно $(0,1 \dots 0,2) \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$.

Последовательные приближения возмущающего потенциала T по степеням параметра k получены с помощью интегральных уравнений [1, 2, 6], а также с помощью формального аналитического продолжения аномалий (1) на отсчетную сферу, расположенную внутри поверхности S [3, 4, 7], что соответствует основному и более метода малого параметра, т. е. использованию решения задачи для более простой поверхности, принимаемой за отсчетную. Точность решений, найденных этими двумя различными путями