

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН И ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ МАТРИЦ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ УРАВНИВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Раньше геодезические сети чаще уравнивали коррелятным или параметрическим методами. С появлением ЭВМ стал применяться преимущественно параметрический метод как наиболее удобный для программирования. В последнее время начали применяться модифицированные методы параметрического уравнивания [1, 3—7], в основу которых положены уравнения поправок параметрического метода. Так, выполняя линейные преобразования над классическими уравнениями поправок, можно получить условные уравнения, или уравнения поправок, в которых параметрами являются поправки в необходимые измерения. Эти методы в некоторых случаях более эффективны для применения ЭВМ.

Рассмотрим оценку точности в различных методах уравнивания геодезических сетей, полагая, что измеряемые величины не содержат систематических ошибок, распределены нормально и коррелированы, причем корреляционные матрицы измерений (прямая и обратная) известны:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{tt} : Q_{rt} \\ \dots \\ Q_{tr} : Q_{rr} \end{pmatrix}; \quad (1)$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} P_{tt} : P_{rt} \\ \dots \\ P_{tr} : P_{rr} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где n, t, r — числа всех, необходимых и избыточных измерений.

1. Коррелятный метод уравнивания. В этом методе оценку точности выполняют по формуле

$$1/P_F = f^T \{Q - QA^T(AQA^T)^{-1}AQ\} f, \quad (3)$$

где $f^T = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1} \frac{\partial F}{\partial l_2} \dots \frac{\partial F}{\partial l_n} \right)$ — матрица-строка коэффициентов весовой функции dF уравненных элементов геодезической сети; P_F — вес функции уравненных величин, A — матрица коэффициентов условных уравнений; Q — корреляционная матрица измерений. Вывод формулы (3) довольно прост [4]. Пусть L' — вектор истинных значений измеряемых величин, L_0 — вектор уравненных значений, l — вектор измеренных величин. Истинную ошибку функции определяем по формуле

$$\Delta F = F(L') - F(L_0) = f^T(\Delta - V), \quad (4)$$

решение которого на основе обобщенного метода наименьших квадратов приводит к результату

$$\begin{pmatrix} V_t \\ V_r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Q_{tt} & Q_{tr} \\ Q_{tr} & Q_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^T \\ -E \end{pmatrix} R^{-1} L_r, \quad (16)$$

$$R = Q_{rr} - Q_{tr} S^T - S Q_{tr} + S Q_{tt} S^T; \quad S = B_r B_t^{-1}.$$

Подставляя в (3) вместо A выражение $A = (S, -E)$, получаем обратный вес функции F уравненных коррелированных измерений в модифицированном параметрическом методе

$$\frac{1}{P_r} = f^T \left\{ Q - Q \begin{pmatrix} S^T \\ -E \end{pmatrix} R^{-1} (S, -E) Q \right\} f. \quad (17)$$

В случае определения веса уравненных координат определяемых пунктов (17) принимает вид

$$\frac{1}{P_x} = f_x^T B_t^{-1} \left\{ Q_{tt} - (Q_{tt} Q_{tr}) \begin{pmatrix} S^T \\ -E \end{pmatrix} R^{-1} (S, -E) \begin{pmatrix} Q_{tr} \\ Q_{rr} \end{pmatrix} \right\} B_t^{-T} f_x, \quad (18)$$

где

$$f_x^T = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial y_2} \dots \right).$$

Обоснование (18) следует из замены

$$f^T = (f_t^T, 0_r^T), \quad f = \begin{pmatrix} f_t \\ 0_r \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial l_t} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l_t} = f_x^T B_t^{-1}$$

и простых преобразований с блочными матрицами. Здесь 0_r — нулевой вектор порядка r .

3. Параметрический метод уравнивания. Исходя из (4) и выполняя точно такие же преобразования, как ранее, легко получить

$$\frac{1}{P_F} = f^T B (B^T Q^{-1} B)^{-1} B^T f, \quad (19)$$

где B — прямоугольная матрица уравнений поправок;

$$BX + L = V, \quad (20)$$

X — вектор поправок в координаты определяемых пунктов; L — матрица-столбец свободных членов; V — матрица-столбец поправок в измеренные величины.

4. Модифицированный параметрический метод с измеряемыми параметрами [5]. Записав (20) в блочном виде

$$\begin{pmatrix} B_t \\ B_r \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ L_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_t \\ V_r \end{pmatrix} \quad (21)$$

и выполнив простое линейное преобразование, нетрудно получить уравнение поправок параметрического метода с измеряемыми параметрами

$$\begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix} V_t + \begin{pmatrix} 0 \\ L_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_t \\ V_r \end{pmatrix}, \quad (22)$$

а решая (22) на основе обобщенного метода наименьших квадратов, приходим к результату:

$$V_t = -R_1^{-1} (P_{rt} + S^T P_{rr}) L_r, \quad (23) \quad V_r = S V_t + L_r, \quad (24)$$

где

$$R_1 = P_{tt} + P_{rt} S + S^T P_{tr} + S^T P_{rr} S,$$

а индексы t и r означают, что соответствующие им величины относятся к необходимым и избыточным измерениям.

Подставив в (19) вместо B выражение $B = \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix}$, получим вес функции F уравненных коррелированных измерений в параметрическом методе с измеряемыми параметрами

$$\frac{1}{P_F} = f^T \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix} R_1^{-1} (E_1, S^T) f. \quad (25)$$

Если вычислять вес уравненных координат определяемых пунктов, то (25) упрощается

$$\frac{1}{P_x} = f_x^T B_t^{-1} R_1^{-1} B_t^{-T} f_x. \quad (26)$$

5. Обработка измерений одной и той же величины. В этом случае наилучшее значение вычисляется по [2]

$$L_0 = (S^T Q^{-1} S)^{-1} S^T Q^{-1} L, \quad (27)$$

а обратный вес

$$\frac{1}{P_{L_0}} = (S^T Q^{-1} S)^{-1}, \quad (28)$$

где $S^T = (111 \dots 11)$, $L^T = (l_1 l_2 \dots l_n)$.

Ошибка единицы веса в коррелятном и параметрическом методах уравнивания вычисляется по формулам

$$\sigma^2 = \frac{V^T Q^{-1} V}{r} = \frac{1}{r} W^T (A Q A^T)^{-1} W, \quad (29)$$

$$\sigma^2 = \frac{V^T Q^{-1} V}{r} = \frac{1}{r} L^T \{Q^{-1} - Q^{-1} B (B^T Q^{-1} B)^{-1} B^T Q^{-1}\} L. \quad (30)$$

Из (29) легко получить формулу Ферреро и ее обобщение на коррелированные измерения.

6. Обусловленность матриц нормальных уравнений. Система линейных уравнений считается хорошо обусловленной, если небольшие изменения в ее коэффициентах и свободных членах мало

влияют на результаты решения. Убедительным признаком плохой обусловленности системы нормальных уравнений является чувствительность элементов обратной матрицы к небольшим изменениям элементов исходной матрицы. В теории решения систем линейных уравнений есть много критериев, характеризующих обусловленность систем. Больше всего получили применение числа А. М. Тюринга (1948) и И. Тодда (1950).

Пусть матрица нормальных уравнений имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Английский математик А. М. Тюринг для чисел обусловленности использует понятия нормы матрицы и максимума модулей ее элементов

$$M = nM(A)M(A^{-1}); \quad (31) \quad N = \frac{1}{n}N(A)N(A^{-1}), \quad (32)$$

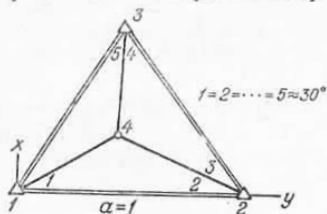
где

$$M(A) = \max |a_{ij}|, \quad N(A) = \left(\sum_{ij} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Его соотечественник И. Тодд предложил число обусловленности P

$$P = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}, \quad (33)$$

где $|\lambda_n|$, $|\lambda_1|$ — максимальное и минимальное по модулю собственные числа матрицы A , n — порядок матрицы.



Сеть триангуляции.

Полагают, что чем меньше числа M , N или P , тем лучше обусловлена система линейных уравнений.

Приведем пример оценки точности сети триангуляции, изображенной на рисунке. Пусть в сети с одинаковой точностью измеряются направления. Будем уравнивать сеть по углам. Смежные углы на пунктах 2 и 3 будут коррелированы, так как они имеют общие направления. Легко установить теоретически, что коэффи-

коэффициент корреляции при этом равен $-0,5$, а корреляционные матрицы (прямая и обратная) имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 1 \end{pmatrix} = Q, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = Q^{-1}.$$

Ниже приведены результаты вычислений с учетом и без учета корреляционной матрицы четырьмя методами уравнивания. Составлены матрицы условных уравнений, уравнений поправок, нормальных уравнений. Подсчитаны веса для угла 3 и ординаты x_4 , а также числа Тюринга.

Коррелятный метод

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad AQA = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(AQA^T)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 11 & 1 & -2 \\ 1 & 11 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$f_3^r = (00100), \quad f_{x_4}^r = \frac{1}{3}(11000), \quad \frac{1}{P_3} = \frac{21}{40}, \quad \frac{1}{P_{x_4}} = \frac{23}{120}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = AA^T, \quad (AA^T)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$M = 9,90; \quad N = 1,91, \quad \frac{1}{P'_3} = \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{P'_{x_4}} = \frac{11}{72}. \quad M' = 5,63; \quad N' = 1,76.$$

Параметрический метод

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ 3 & \sqrt{3} \\ -3 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B^T Q^{-1} B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 21 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 23 \end{pmatrix}.$$

$$(B^T Q^{-1} B)^{-1} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 23 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}.$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} 9 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}, \quad (B^T B)^{-1} = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} 11 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P_3} = \frac{21}{40}, \quad \frac{1}{P_{x_1}} = \frac{23}{120}. \quad M = 2,20; \quad N = 1,02.$$

$$\frac{1}{P'_3} = \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{P'_{x_1}} = \frac{11}{72}. \quad M' = 3,36; \quad N' = 1,44.$$

Модифицированный параметрический метод

$$B_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B_r = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$B_t^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \\ -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 11 & -1 & 1 \\ -1 & 11 & 9 \\ 1 & 9 & 11 \end{pmatrix},$$

$$f_{x_1}^T = (10), \quad \frac{1}{P_3} = \frac{21}{40}, \quad \frac{1}{P_{x_1}} = \frac{23}{120}. \quad M = 9,9; \quad N = 4,37.$$

$$R' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (R^{-1})' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 15 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P'_3} = \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{P'_{x_1}} = \frac{11}{72}. \quad M' = 16,88; \quad N' = 4,04.$$

Модифицированный параметрический метод
с измеряемыми параметрами

$$R_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad R_1^{-1} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7/4 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P_3} = \frac{21}{40}, \quad \frac{1}{P_{x_1}} = \frac{23}{120}. \quad M = 3,20; \quad N = 1,80.$$

$$R_1' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad (R_1^{-1})' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P'_3} = \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{P'_{x_1}} = \frac{11}{72}. \quad M' = 4; \quad N' = 2,07.$$

Ошибка единицы веса

$$\sigma^2 = \frac{1}{30} W^T \begin{pmatrix} 11 & 1 & -2 \\ 1 & 11 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} W, \quad \sigma'^2 = \frac{1}{24} W^T \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} W.$$

Как и должно быть, параметрический метод уравнивания оказался для обработки данной сети наиболее эффективным (числа Тюринга получились наименьшими). Заметим, что R' , $(R^{-1})'$, R_1' , $(R_1^{-1})'$ обозначают матрицы нормальных уравнений (прямую и обратную) в модифицированных параметрических методах уравнивания, составленные без учета корреляционных связей.

Список литературы: 1. Герасименко М. Д. Единый алгоритм составления условных уравнений и его применение для уравнивания и оценки точности геодезических построений. — Тр. ЦНИИГАиК, 1975, вып. 34, с. 65—73. 2. Кемниц Ю. В. Математическая обработка зависимых результатов измерений. — М.: Недра, 1970. — 188 с. 3. Монин И. И. Единый алгоритм составления условных уравнений в геодезических сетях. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 35, с. 75—84. 4. Монин И. И. К оцениванию геодезических сетей. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 38, с. 81—89. 5. Монин И. И. К теории параметрического способа уравнивания. — Геодезия и картография, 1983, № 9, с. 6—8. 6. Юрианский З. М. О едином алгоритме уравнивания параметрическим и коррелятным способами. — Применение геодезических методов при строительстве и эксплуатации инженерных сооружений, 1979, т. 7(47), с. 72—85. 7. Linder B. V. Ein Verfahren zur automatisierten Aufstellung von Bedingungsgleichungen in Schleifennetzen. — Z. Vermessungsw., 1983, Bd. 108, № 4, S. 160—166.