$$(B^T Q^{-1} B)^{-1} = \frac{1}{120}\begin{pmatrix} 23 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}.$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} 9 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}, \quad (B^T B)^{-1} = \frac{1}{72}\begin{pmatrix} 11 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P_3} = \frac{21}{40}, \quad \frac{1}{P_{x_1}} = \frac{23}{120}. \quad M = 2{,}20; \; N = 1{,}02.$$

$$\frac{1}{P_3'} = \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{P'_{x_1}} = \frac{11}{72}. \quad M' = 3{,}36; \; N' = 1{,}44.$$

Модифицированный параметрический метод

$$B_l = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B_r = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$B_l^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \\ -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 11 & -1 & 1 \\ -1 & 11 & 9 \\ 1 & 9 & 11 \end{pmatrix},$$

$$f^T_{x_1} = (10), \; \frac{1}{P_3} = \frac{21}{40}, \; \frac{1}{P_{x_1}} = \frac{23}{120}. \quad M = 9{,}9; \; N = 4{,}37.$$

$$R' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (R^{-1})' = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 15 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P_3'} = \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{P'_{x_1}} = \frac{11}{72}. \quad M' = 16{,}88; \; N' = 4{,}04.$$

Модифицированный параметрический метод
с измеряемыми параметрами

$$R_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad R_1^{-1} = \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7/4 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P_3} = \frac{21}{40}, \quad \frac{1}{P_{x_1}} = \frac{23}{120}. \quad M = 3{,}20; \; N = 1{,}80.$$

$$R_1' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad (R_1^{-1})' = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P_3'} = \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{P'_{x_1}} = \frac{11}{72}. \quad M' \dot{=} 4; \; N' = 2{,}07.$$

Ошибка единицы веса

$$\sigma^2 = \frac{1}{30} W^T \begin{pmatrix} 11 & 1 & -2 \\ 1 & 11 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} W, \quad \sigma'^2 = \frac{1}{24} W^T \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} W.$$

Как и должно быть, параметрический метод уравнивания оказался для обработки данной сети наиболее эффективным (числа Тюринга получились наименьшими). Заметим, что R', $(R^{-1})'$, R_1', $(R_1^{-1})'$ обозначают матрицы нормальных уравнений (прямую и обратную) в модифицированных параметрических методах уравнивания, составленные без учета корреляционных связей.

Список литературы: 1. *Герасименко М. Д.* Единый алгоритм составления условных уравнений и его применение для уравнивания и оценки точности геодезических построений. — Тр. ЦНИИГАиК, 1975, вып. 34, с. 65—73. 2. *Кемниц Ю. В.* Математическая обработка зависимых результатов измерений. — М.: Недра, 1970. — 188 с. 3. *Монин И. И.* Единый алгоритм составления условных уравнений в геодезических сетях. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 35, с. 75—84. 4. *Монин И. И.* К оцениванию геодезических сетей. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 38, с. 81—89. 5. *Монин И. И.* К теории параметрического способа уравнивания. — Геодезия и картография, 1983, № 9, с. 6—8. 6. *Юршанский З. М.* О едином алгоритме уравнивания параметрическим и коррелатным способами. — Применение геодезических методов при строительстве и эксплуатации инженерных сооружений, 1979, т. 7(47), с. 72—85. 7. *Linder B. V.* Ein Verfahren zur automaticieren Aufstellung von Bedingungsgleichungen in Schleiclennetzen. — Z. Vermessungsw., 1983, Bd. 108, № 4, S. 160—166.

Статья поступила в редколлегию 01. 10. 84

УДК 528.11+519.654

И. Ф. МОНИН, Б. М. ДЖУМАН, Ю. В. МОРКОТУН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ПО РАЗНОСТЯМ ИЗМЕРЕНИЙ, ВЫЧИСЛЕННЫМ ВО ВСЕХ КОМБИНАЦИЯХ

Среднюю квадратическую ошибку одного измерения по Гауссу определяют:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{1}^{n}(l_i - L)^2}{n}, \tag{1}$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — результаты равноточных измерений; n — число измерений; L — истинная величина измерения.

Вычислим разности измерений, взятые во всех комбинациях,

$$\begin{array}{r|l} l_2 - l_1, \; l_3 - l_2, \cdots, l_n - l_1 & n-1 \\ l_3 - l_2, \cdots, l_n - l_2 & n-2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ l_n - l_{n-1} & 1. \end{array}$$

Их будет $n(n-1)/2$, причем истинная ошибка каждой разности равна нулю. Найдем по (1) среднюю квадратическую ошибку разности измерений

$$\sigma^2_{l_i-l_j} = \frac{\sum_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (l_i - l_j - 0)^2}{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Так как

$$\sigma^2_{l_i-l_j} = \sigma^2_{l_i} + \sigma^2_{l_j}, \text{ то}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (l_i - l_j)^2}{n(n-1)}. \quad (2)$$

Формула (2) позволяет вычислять стандарт одного измерения по разностям измерений, вычисленным во всех комбинациях. Получим из нее известную формулу Бесселя. Вместо истинного значения L, которое неизвестно, введем арифметическую середину L_0. Заметив, что

$$l_i - l_j = (l_i - L_0) - (l_j - L_0) = V_i - V_j,$$

где V_i, V_j — принятые отклонения от L_0, преобразуем числитель формулы (2) следующим образом:

$$\sum_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (l_i - l_j)^2 = (V_2 - V_1)^2 + (V_3 - V_i)^2 + (V_4 - V_1)^2 \ldots +$$
$$+ (V_n - V_1)^2 + (V_3 - V_2)^2 + (V_4 - V_2)^2 \ldots + (V_n - V_2)^2 +$$
$$+ (V_4 - V_3)^2 \ldots + (V_n - V_3)^2 + \ldots\ldots\ldots +$$
$$+ (V_n - V_{n-1})^2 = (n-1)\sum_{1}^{n} V_i^2 - 2\sum_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} V_i V_j.$$

Прибавляя к написанной сумме выражение

$$(V_1 + V_2 + \ldots + V_n)^2 = \sum_{1}^{n} V_i^2 + 2\sum_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} V_i V_j = 0,$$

получаем

$$\sum_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (l_i - l_j)^2 = n\sum_{1}^{n} V_i^2. \quad (3)$$

Следовательно, из формулы (2) и преобразования (3) выводим формулу Бесселя

$$m^2 = \frac{\sum_{1}^{n} V_i^2}{n-1}. \quad (4)$$

Такого вывода формулы (4) в литературе по теории ошибок нет. Формула (2), насколько нам известно, новая.

Статья поступила в редколлегию 10. 09. 84

УДК 528.11

Ю. В. МОРКОТУН, С. С. ПЕРИЙ

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ФЕХНЕРА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Для оценки тесноты корреляционной связи используются эмпирический коэффициент корреляции, вычисление которого, особенно в случае больших выборок, довольно громоздко. Если тесноту связи не требуется знать с высокой точностью, можно применять какой-либо иной показатель, более просто вычисляемый.

Наиболее простым и удобным показателем является коэффициент Фехнера, которым часто пользуются в экономике [3].

Коэффициент Фехнера вычисляется по формуле

$$i_ф = \frac{u - v}{u + v}, \quad (1)$$

где u — число совпадений знаков отклонений изучаемых величин от их средних; v — число несовпадений знаков.

Если несколько отклонений равны нулю, то их поровну распределяют в число u-совпадений, и в число v-несовпадений.

Коэффициент Фехнера изменяется в пределах от -1 до $+1$, как и коэффициент корреляции.

Если связь между признаками обратная, то $i_ф$ отрицателен, в случае прямой связи — положителен. Чем ближе $i_ф$ к ± 1, тем связь более тесная.

Для проверки качества оценки степени тесноты связи с помощью коэффициента Фехнера были вычислены $i_ф$ для двадцати случаев небольших выборок ($n=18$) и для двадцати случаев больших выборок ($n=60$), для которых также были вычислены эмпирические коэффициенты обычными методами. Данные приведены в табл. 1, 2.