УДК 528.11+519.654

И. Ф. МОНИН, Б. М. ДЖУМАН, Ю. В. МОРКОТУН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ПО РАЗНОСТЯМ ИЗМЕРЕНИЙ, ВЫЧИСЛЕННЫМ ВО ВСЕХ КОМБИНАЦИЯХ

Среднюю квадратическую ошибку одного измерения по Гауссу определяют:

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_{1}^{n}(l_i - L)^2}{n}, \tag{1}$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — результаты равноточных измерений; n — число измерений; L — истинная величина измерения.

Вычислим разности измерений, взятые во всех комбинациях,

$$\begin{array}{r|c}
l_2 - l_1,\ l_3 - l_2, \cdots, l_n - l_1 & n-1 \\
l_3 - l_2, \cdots, l_n - l_2 & n-2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
l_n - l_{n-1} & 1.
\end{array}$$

Их будет $n(n-1)/2$, причем истинная ошибка каждой разности равна нулю. Найдем по (1) среднюю квадратическую ошибку разности измерений

$$\sigma^2_{l_i-l_j} = \frac{\sum\limits_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (l_i - l_j - 0)^2}{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Так как $\sigma^2_{l_i-l_j} = \sigma^2_{l_i} + \sigma^2_{l_j}$, то

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (l_i - l_j)^2}{n(n-1)}. \tag{2}$$

Формула (2) позволяет вычислять стандарт одного измерения по разностям измерений, вычисленным во всех комбинациях. Получим из нее известную формулу Бесселя. Вместо истинного значения L, которое неизвестно, введем арифметическую середину L_0. Заметив, что

$$l_i - l_j = (l_i - L_0) - (l_j - L_0) = V_i - V_j,$$

где V_i, V_j — принятые отклонения от L_0, преобразуем числитель формулы (2) следующим образом:

$$\sum_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (l_i - l_j)^2 = (V_2 - V_1)^2 + (V_3 - V_1)^2 + (V_4 - V_1)^2 \ldots +$$
$$+ (V_n - V_1)^2 + (V_3 - V_2)^2 + (V_4 - V_2)^2 \ldots + (V_n - V_2)^2 +$$
$$+ (V_4 - V_3)^2 \ldots + (V_n - V_3)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ (V_n - V_{n-1})^2 = (n-1)\sum_{1}^{n} V_i^2 - 2\sum_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} V_i V_j.$$

Прибавляя к написанной сумме выражение

$$(V_1 + V_2 + \ldots + V_n)^2 = \sum_{1}^{n} V_i^2 + 2\sum_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} V_i V_{j=0},$$

получаем

$$\sum_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (l_i - l_j)^2 = n\sum_{1}^{n} V_i^2. \tag{3}$$

Следовательно, из формулы (2) и преобразования (3) выводим формулу Бесселя

$$m^2 = \frac{\sum_1^n V_i^2}{n-1}. \tag{4}$$

Такого вывода формулы (4) в литературе по теории ошибок нет. Формула (2), насколько нам известно, новая.

Статья поступила в редколлегию 10. 09. 84