

Н. И. ИВАНОВ

К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАСЕЧКИ

Дифференциальные линейные уравнения для вывода новой формулы по оценке точности однократной обратной засечки получены дифференцированием формул швейцарского геодезиста Ансермета, выражающих непосредственно координаты определяемой четвертой точки. Состав формул следующий [1] (обозначения, согласно рис. 1):

$$X = \frac{p_1 X_1 + p_2 X_2 + p_3 X_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{[pX]}{[p]}, \quad (1)$$

$$Y = \frac{p_1 Y_1 + p_2 Y_2 + p_3 Y_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{[pY]}{[p]}, \quad (2)$$

$$p_1 = \frac{1}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} \alpha}; \quad p_2 = \frac{1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} \beta}; \quad p_3 = \frac{1}{\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} \gamma}. \quad (3)$$

Пренебрегая ошибками исходных данных, рассматриваем координаты исходных точек 1 (X_1, Y_1), 2 (X_2, Y_2) и 3 (X_3, Y_3), а следовательно, и углы A, B, C как величины постоянные.

Углы α, β и γ получают по данным измерений. Мы рассмотрим следующие два случая: первый, когда измерены независимо, например, способом повторений, все три угла, которые уравновешены за условие горизонта; второй, когда измерены направления, например, способом круговых приемов, и углы для вычисления координат получают как разности направлений.

Определим сначала ошибку абсциссы точки 4. Дифференцируя формулу (1) по трем переменным p_1, p_2, p_3 , получаем:

$$dX = \frac{X_1 dp_1 + X_2 dp_2 + X_3 dp_3 - X (dp_1 + dp_2 + dp_3)}{[p]}. \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} X - X_i &= \Delta X_i, \\ Y - Y_i &= \Delta Y_i. \end{aligned} \quad (5)$$

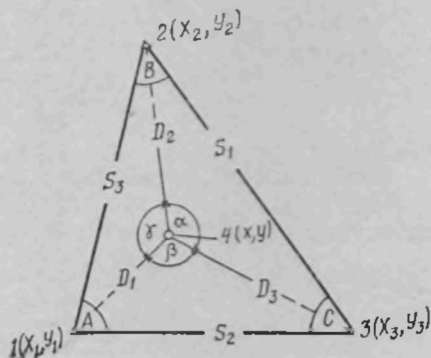


Рис. 1.

Теперь равенство (4) примет следующий вид:

$$dX = - \frac{\Delta X_1 dp_1 + \Delta X_2 dp_2 + \Delta X_3 dp_3}{[p]}. \quad (6)$$

Далее дифференцируем выражения (3) по переменным α, β, γ .

$$dp_1 = - \frac{1}{(\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} \alpha)^2} \cdot \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} = - \frac{p_1^2 d\alpha}{\sin^2 \alpha}; \quad dp_2 = - \frac{p_2^2 d\beta}{\sin^2 \beta}; \quad dp_3 = - \frac{p_3^2 d\gamma}{\sin^2 \gamma}. \quad (7)$$

Подставляя значения дифференциалов dp_i в выражение (6), получаем:

$$[p] dX = k_1 d\alpha + k_2 d\beta + k_3 d\gamma. \quad (8)$$

Для сокращения записей обозначим:

$$\frac{p_i^2 \Delta X_i}{\sin^2 i} = k_i, \quad (9)$$

где $i=1, 2, 3$, или α, β, γ .

Коэффициенты k_i и $[p]$ не содержат величин, зависящих от переменных малых приращений. Но сами приращения $d\alpha, d\beta$ и $d\gamma$ взаимозависимы, так как значения углов α, β, γ , принимаемые для вычисления координат по формулам (1)–(3), не являются независимыми измерениями.

Рассмотрим вначале первый случай, когда при определяемой точке все три угла измерены и уравновешены за условие горизонта.

Уравновешенные углы α, β и γ являются функциями непосредственно измеренных углов α', β' и γ' . Например,

$$\alpha = \frac{\alpha' + \frac{1}{2}(360^\circ - \beta' - \gamma')}{1 \frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Отсюда

$$d\alpha = \frac{2}{3} d\alpha' - \frac{1}{3} d\beta' - \frac{1}{3} d\gamma'. \quad (11)$$

Аналогичными формулами выражаются β, γ и их дифференциалы.

Подставляя в выражение (8) значения дифференциалов, согласно равенствам (11), получим:

$$3[p] dX = (2k_1 - k_2 - k_3) d\alpha' + (-k_1 + 2k_2 - k_3) d\beta' + (-k_1 - k_2 + 2k_3) d\gamma'. \quad (12)$$

Уравнение (12) содержит в правой части только независимые переменные, которые могут рассматриваться как ошибки непосредственно измеренных величин. Теперь можно перейти к средним квадратическим ошибкам.

$$9[p]^2 m_x^2 = (2k_1 - k_2 - k_3)^2 m_{\alpha'}^2 + (-k_1 + 2k_2 - k_3)^2 m_{\beta'}^2 + (-k_1 - k_2 + 2k_3)^2 m_{\gamma'}^2. \quad (13)$$

Принимая, что измерения углов равноточны, и полагая

$$m_{\alpha} = m_{\beta} = m_{\gamma} = m_{\text{изм}}, \quad (14)$$

после соответствующих преобразований получим:

$$[p]^2 m_x^2 = \frac{2}{3} m_{\text{изм}}^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_1 k_3 - k_2 k_3). \quad (15)$$

Обозначая среднюю квадратическую ошибку угла, уравновешенного за условие горизонта, через $m_{\text{уравн}}$ и учитывая, что веса уравновешенных значений углов, согласно равенству (11), равны $\frac{3}{2}$, имеем:

$$m_{\text{уравн}} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot m_{\text{изм}} = \pm 0,816 m_{\text{изм}}. \quad (16)$$

Отсюда

$$[p]^2 m_x^2 = m_{\text{уравн}}^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_1 k_3 - k_2 k_3). \quad (17)$$

Выражение для определения ошибки абсциссы получено. Сопоставляя формулы (1) и (2), по которым вычисляются абсцисса и ордината, и принимая во внимание выражения (8) и (9), можем сразу написать выражение для ошибки ординаты:

$$[p]^2 m_y^2 = m_{\text{уравн}}^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - l_1 l_2 - l_1 l_3 - l_2 l_3), \quad (18)$$

где

$$l_i = \frac{p_i^2 \Delta Y_i}{\sin^2 i}. \quad (19)$$

Средняя квадратическая ошибка M положения пункта определяется по формуле:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2, \quad (20)$$

согласно которой надо сложить равенства (17) и (18).

Принимая во внимание обозначения (9) и (19), имеем:

$$k_i^2 + l_i^2 = \frac{p_i^4 (\Delta X_i^2 + \Delta Y_i^2)}{\sin^4 i} = \frac{p_i^4 D_i^2}{\sin^4 i}, \quad (21)$$

где D_i — расстояние от определяемой точки до исходной точки i .

Рассмотрим теперь выражение:

$$k_1 k_2 + l_1 l_2 = \frac{p_1^2 p_2^2 (\Delta X_1 \Delta X_2 + \Delta Y_1 \Delta Y_2)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}.$$

Полагая

$$\Delta X_1 = D_1 \cos \vartheta; \quad \Delta Y_1 = D_1 \sin \vartheta,$$

получим

$$\Delta X_2 = D_2 \cos (\vartheta + \gamma); \quad \Delta Y_2 = D_2 \sin (\vartheta + \gamma).$$

Отсюда

$$\Delta X_1 \cdot \Delta X_2 + \Delta Y_1 \cdot \Delta Y_2 = D_1 D_2 \cos \vartheta \cdot \cos (\vartheta + \gamma) + D_1 D_2 \sin \vartheta \cdot \sin (\vartheta + \gamma) = D_1 D_2 \cos \gamma.$$

Следовательно,

$$\kappa_1 \kappa_2 + l_1 l_2 = \frac{p_1^2 p_2^2 D_1 D_2 \cos \gamma}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}. \quad (22)$$

Аналогично выразятся суммы произведений k_i , l_i , входящих в выражения (17), (18) в других комбинациях.

Складывая выражения (17) и (18) с учетом (20), (21) и (22), получим:

$$\frac{[p]^2 M^2}{m_{\text{уравн}}^2} = \frac{p_1^4 D_1^2}{\sin^4 \alpha} + \frac{p_2^4 D_2^2}{\sin^4 \beta} + \frac{p_3^4 D_3^2}{\sin^4 \gamma} - \frac{p_1^2 p_2^2 D_1 D_2 \cos \gamma}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} - \frac{p_1^2 p_3^2 D_1 D_3 \cos \beta}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \gamma} - \frac{p_2^2 p_3^2 D_2 D_3 \cos \alpha}{\sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma}. \quad (23)$$

Для дальнейших преобразований докажем сначала правильность следующих равенств в любом четырехугольнике:

$$\frac{D_1 \sin A}{\sin(\alpha - A)} = \frac{D_2 \sin B}{\sin(\beta - B)} = \frac{D_3 \sin C}{\sin(\gamma - C)} = U, \quad (24)$$

и равенств, тождественных с ними:

$$U = \frac{p_1 D_1}{\sin \alpha} = \frac{p_2 D_2}{\sin \beta} = \frac{p_3 D_3}{\sin \gamma}. \quad (25)$$

Равенства (24) выражают соотношение между сторонами и диагональю четырехугольника, исходящими из одной точки, и синусами углов (рис. 2). Они напоминают теорему синусов треугольника.

На рис. 2 точка 2' находится на пересечении продолжения линии 2—4 с окружностью, описанной вокруг треугольника 1—2—3. Соединив точку 2' с точками 1 и 3, получаем два треугольника: 4—3—2' и 4—2'—1.

В треугольнике 4—3—2' угол при точке 2' равен A, как опирающийся на ту же дугу, что и угол 3—1—2, а угол при точке 4 равен 180—α. Отсюда угол при точке 3 равен α—A.

В треугольнике 4—2'—1 угол при точке 2' равен C, а угол при точке 1 равен γ—C.

Применяя теорему синусов, составим для этих треугольников следующие равенства:

$$g_2 = \frac{D_1 \sin(\gamma - C)}{\sin C} = \frac{D_3 \sin(\alpha - A)}{\sin A}. \quad (26)$$

Отсюда

$$\frac{D_1 \sin A}{\sin(\alpha - A)} = \frac{D_3 \sin C}{\sin(\gamma - C)}.$$

Аналогичным путем, построив на рис. 2 точку 3', можно доказать, что

$$\frac{D_1 \sin A}{\sin(\alpha - A)} = \frac{D_2 \sin B}{\sin(\beta - B)}.$$

Таким образом, справедливость равенства (24) нами доказана.

Равенства (25) нетрудно подтвердить тождественным преобразованием одной из его частей к виду соответствующей части равенства (24). Действительно:

$$p_1 = \frac{1}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} \alpha} = 1 : \left(\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{\sin \alpha \sin A}{\sin(\alpha - A)}. \quad (27)$$

Подставляя это значение p_1 в соответствующую часть равенства (25), получаем:

$$\frac{p_1 D_1}{\sin \alpha} = \frac{D_1 \sin A}{\sin(\alpha - A)}. \quad (28)$$

Теперь вернемся к равенству (23) и продолжим преобразования, пользуясь равенствами (25).

Первые три члена правой части равенства (23) дают:

$$\frac{p_1^4 D_1^2}{\sin^4 \alpha} + \frac{p_2^4 D_2^2}{\sin^4 \beta} + \frac{p_3^4 D_3^2}{\sin^4 \gamma} = U^4 \left(\frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{D_2^2} + \frac{1}{D_3^2} \right) = U^4 \left[\frac{1}{D_i^2} \right]. \quad (29)$$

Вторые три члена, умножив предварительно числители и знаменатели их на произведение $D_1 \cdot D_2 \cdot D_3$, преобразуем к виду:

$$- U^4 \frac{D_1 \cos \alpha + D_2 \cos \beta + D_3 \cos \gamma}{D_1 D_2 D_3} = - U^4 \frac{[D_i \cos i]}{D_1 D_2 D_3}. \quad (30)$$

Теперь выражение (23) с учетом (29) и (30) можно представить в виде следующей формулы:

$$M = \pm \frac{m_{\text{уравн}} \cdot U^2}{\rho''[p]} \sqrt{\left[\frac{1}{D_i^2} \right] - \frac{[D_i \cos i]}{D_1 D_2 D_3}}, \quad (31)$$

где U определяется равенствами (24) и (25). Этой формулой уже можно пользоваться для оценки точности обратной засечки.

Но выражение, стоящее под знаком радикала, можно еще упростить.

Пользуясь теоремой косинусов для трех треугольников, включающих четвертую точку, напомним (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} S_1^2 &= D_2^2 + D_3^2 - 2D_2 D_3 \cdot \cos \alpha, \\ S_2^2 &= D_1^2 + D_3^2 - 2D_1 D_3 \cdot \cos \beta, \\ S_3^2 &= D_1^2 + D_2^2 - 2D_1 D_2 \cdot \cos \gamma. \end{aligned} \quad (32)$$

Решая относительно косинуса и умножая соответственно на D_1 , D_2 , D_3 , получим:

$$\begin{aligned} D_1 \cos \alpha &= \frac{(D_2^2 + D_3^2 - S_1^2) D_1}{2D_2 D_3}, \\ D_2 \cos \beta &= \frac{(D_1^2 + D_3^2 - S_2^2) D_2}{2D_1 D_3}, \\ D_3 \cos \gamma &= \frac{(D_1^2 + D_2^2 - S_3^2) D_3}{2D_1 D_2}. \end{aligned}$$

Приведя к общему знаменателю и сложив эти три равенства, получим:

$$[D_i \cos i] = \frac{D_1^2 D_2^2 + D_1^2 D_3^2 + D_2^2 D_3^2}{D_1 D_2 D_3} - \frac{S_1^2 D_1^2 + S_2^2 D_2^2 + S_3^2 D_3^2}{2D_1 D_2 D_3}. \quad (33)$$

Формула (31) после замены выражения, находящегося под радикалом, согласно равенству (33), примет такой вид:

$$M_I = \pm \frac{m_{\text{уравн}}^* \cdot U^2 \sqrt{\sum_1^3 (S_i D_i)^2}}{\rho'' \cdot \sqrt{2} \cdot [p] \cdot D_1 D_2 D_3}. \quad (34)$$

В формуле (34) M дано с индексом «I» в знак того, что формула предусматривает случай измерения отдельных углов с уравниванием за условие горизонта.

Формулу (34) удобно применять для вычисления ошибки определения пункта при вычислении его координат по формулам Ансермета, когда представляется возможным использовать готовые значения p_i и $[p]$. Чтобы получить формулу для общего употребления, не зависящую от способа решения самой задачи Потенота, нужно исключить p_i .

Раскроем сначала $[p]$. Согласно равенству (27) можем написать:

$$[p] = \frac{\sin \alpha \cdot \sin A}{\sin(\alpha - A)} + \frac{\sin \beta \cdot \sin B}{\sin(\beta - B)} + \frac{\sin \gamma \cdot \sin C}{\sin(\gamma - C)}. \quad (35)$$

Умножая числители и знаменатели правой части, соответственно, на D_1 , D_2 , D_3 , получим:

$$[p] = \frac{D_1 \sin A}{\sin(\alpha - A)} \cdot \frac{\sin \alpha}{D_1} + \frac{D_2 \sin B}{\sin(\beta - B)} \cdot \frac{\sin \beta}{D_2} + \frac{D_3 \sin C}{\sin(\gamma - C)} \cdot \frac{\sin \gamma}{D_3}.$$

Отсюда после замены, согласно равенствам (24), и приведению к общему знаменателю найдем:

$$[p] = U \cdot \frac{D_2 D_3 \sin \alpha + D_1 D_3 \sin \beta + D_1 D_2 \sin \gamma}{D_1 D_2 D_3}.$$

Здесь в числителе — удвоенные площади трех треугольников, имеющих общую вершину в определяемой точке 4; алгебраическая сумма их равна удвоенной площади твердого треугольника $2F$, поэтому

$$[p] = U \cdot \frac{2F}{D_1 D_2 D_3}, \quad (36)$$

где

$$2F = S_2 S_3 \cdot \sin A = S_1 S_3 \cdot \sin B = S_1 S_2 \cdot \sin C. \quad (37)$$

Заменяя в формуле (34) величину $[p]$, согласно равенству (36), получаем:

$$M_I = \pm \frac{m_{\text{уравн}}^*}{\rho'' \sqrt{2}} \cdot \frac{U}{2F} \sqrt{\sum_1^3 (S_i D_i)^2} \quad (38)$$

или

$$M_I = \pm \frac{m_{\text{уравн}}^* \cdot H \sqrt{\sum_1^3 (S_i D_i)^2}}{\rho'' \sqrt{2}}, \quad (39)$$

где

$$H = \frac{U}{2F} = \frac{D_1}{S_2 S_3 \cdot \sin(\alpha - A)} = \frac{D_2}{S_1 S_3 \cdot \sin(\beta - B)} = \frac{D_3}{S_1 S_2 \cdot \sin(\gamma - C)}. \quad (40)$$

Равенства (40) получаются по равенствам (24) и (37); они обеспечивают вычисление H с контролем.

Полученная в окончательном виде формула (39) является наиболее краткой и удобной для вычисления средней ошибки определения пункта обратной засечкой, независимо от способа решения самой задачи Потенота. Входящие в формулу величины могут быть определены графически по мелкомасштабному чертежу, для вычисления достаточно логарифмической линейки.

В формуле (38) иногда удобно применять для вычисления величины U следующее выражение, содержащее только линейные элементы:

$$U = \frac{D_1 D_2 D_3}{D_i g_i} = \frac{D_1 D_2}{g_3} = \frac{D_1 D_3}{g_2} = \frac{D_2 D_3}{g_1},$$

где g_i — расстояния от определяемой точки 4 до окружности, описанной вокруг твердого треугольника по продолжению линий D_i (рис. 2).

Рассмотрим теперь, как изменится формула оценки точности для случая, когда при определяемой точке измерены направления, например, способом круговых приемов.

Обозначим значения измеренных направлений на точки 1, 2, 3 соответственно через $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, тогда будем иметь:

$$\alpha = \vartheta_3 - \vartheta_2; \quad \beta = \vartheta_1 - \vartheta_3; \quad \gamma = \vartheta_2 - \vartheta_1.$$

Отсюда

$$d\alpha = d\vartheta_3 - d\vartheta_2; \quad d\beta = d\vartheta_1 - d\vartheta_3; \quad d\gamma = d\vartheta_2 - d\vartheta_1. \quad (41)$$

Подставим значения дифференциалов из равенств (41) в (8) и после приведения подобных членов получим:

$$[p] dX = (\kappa_1 - \kappa_2) d\vartheta_3 + (\kappa_3 - \kappa_1) d\vartheta_2 + (\kappa_2 - \kappa_3) d\vartheta_1. \quad (42)$$

Затем переходим к средним квадратическим ошибкам. Принимая, что измеренные направления равноточны и средняя квадратическая ошибка направления равна $\frac{m_{\text{изм}}}{\sqrt{2}}$ получим:

$$[p]^2 m_x^2 = \frac{m_{\text{изм}}^2}{2} \{(\kappa_1 - \kappa_2)^2 + (\kappa_3 - \kappa_1)^2 + (\kappa_2 - \kappa_3)^2\}.$$

После возведения в квадрат и приведения подобных членов имеем:

$$[p] m_x^2 = m_{\text{изм}}^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - \kappa_1 \kappa_2 - \kappa_1 \kappa_3 - \kappa_2 \kappa_3). \quad (43)$$

Равенства (17) и (43) содержат в правой части в скобках одну и ту же величину. Поэтому, не повторяя дальнейших выкладок, можем написать для случая измерения направлений формулы, аналогичные (34) и (39):

$$M_{\text{II}} = \pm \frac{m_{\text{изм}}^* \cdot U^2 \sqrt{\sum_1^3 (S_i D_i)^2}}{\rho'' \sqrt{2} [p] D_1 D_2 D_3} \quad (44a); \quad M_{\text{II}} = \pm \frac{m_{\text{изм}}^* \cdot H \sqrt{\sum_1^3 (S_i D_i)^2}}{\rho'' \sqrt{2}}. \quad (44)$$

Значения величин, входящих в окончательные формулы, и порядок их определения в схеме обратной засечки:

S_1, S_2, S_3 — длины сторон твердого треугольника, противолежащие пунктам 1, 2, 3;

D_1, D_2, D_3 — расстояния от определяемой точки до пунктов 1, 2, 3;

A, B, C — углы твердого треугольника, лежащие соответственно против сторон S_1, S_2, S_3 ;

α, β, γ — углы при определяемой точке, лежащие соответственно против сторон S_1, S_2, S_3 ;

величины p, U, H определяются равенствами (3), (25) и (40): $\rho'' = 206\,265''$.

Формулы (39) и (44) различаются лишь тем, что в первую входит множитель $m_{уравн}$, а во вторую $m_{изм}$, соотношение между которыми определяется равенствами (16), поэтому:

$$M_I = \pm M_{II} \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816 \cdot M_{II}. \quad (45)$$

Приводим примеры вычисления ошибок по формуле (44). Исходные данные для примеров определены по чертежу масштаба 1 : 50 000 и сведены в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные для вычисления ошибок по формуле (44)

№ пунк- тов	Твердый треугольник			Определяемая точка 4					Определяемые			
									точка 5		точка 6	
	углы <i>A, B, C</i>	сто- роны, <i>км</i>		углы <i>α, β, γ</i>	сто- роны	<i>α—A</i> <i>β—B</i> <i>γ—C</i>	си- нусы	углы <i>α, β, γ</i>	сто- роны, <i>км</i>	углы <i>α, β, γ</i>	сто- роны, <i>км</i>	
1	A	76°,5	3,14	<i>α</i>	123°,9	1,17	47°,4	0,736	67°,5	0,98	129°,8	1,27
2	B	50°,0	2,47	<i>β</i>	108°,4	1,71	58°,4	0,852	254°,5	3,30	114°,8	1,79
3	C	53°,5	2,59	<i>γ</i>	127°,7	1,84	74°,2	0,962	38°,0	2,02	115°,4	1,66
Σ		180°,0	8,20		360°,0	4,72	180°,0		360°,0	6,30	360°,0	4,72

Постоянный коэффициент формулы $\frac{1}{206\,265 \sqrt{2}} = 3,43 \cdot 10^{-6}$. При-

нимая в расчет расстояния, выраженные в километрах, чтобы получить окончательный результат в метрах, необходимо этот коэффициент умножить на 10^3 , то есть принять для расчета $3,43 \cdot 10^{-3}$.

Для точки 4 имеем:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{D_i}{S_{i+1} \cdot S_{i+2} \cdot \sin(\alpha_i - A_i)} = \frac{1,17}{2,47 \cdot 2,59 \cdot 0,736} = 0,248 \frac{1}{\text{км}} = \\
 &= \frac{1,71}{2,59 \cdot 3,14 \cdot 0,852} = 0,247 \frac{1}{\text{км}}, \\
 &\pm \sqrt{\sum_1^3 (S_i D_i)^2} = \sqrt{54,0} = 7,35 \text{ км}^2.
 \end{aligned}$$

Принимая $m''_{изм} = \pm 10''$, получаем:

$$M_{II} = \pm 3,43 \cdot 10^{-3} \cdot 10'' \cdot 0,247 \cdot 7,35 = \pm 0,062 \text{ м.}$$

Точка 4 расположена внутри твердого треугольника. Ошибка определения точки 5, находящейся за описанной окружностью, вблизи нее, $M_{II} = \pm 0,341$ м. Точка 6, расположенная в центре вписанной окружности, имеет наименьшую ошибку $M_{II} = \pm 0,061$ м.

В случае необходимости раздельного вычисления ошибок абсциссы и ординаты определяемого пункта можно воспользоваться следующими формулами, полученными на основании равенств (17) и (43):

$$m_x = \pm \frac{m''}{\rho'' [p]} \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_1 k_3 - k_2 k_3},$$

$$m_y = \pm \frac{m''}{\rho'' [p]} \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - l_1 l_2 - l_1 l_3 - l_2 l_3}. \quad (46)$$

Значения k_i , l_i определяются равенствами (9) и (19); значение m'' равно $m''_{\text{уравн}}$, если измерялись углы, или $m''_{\text{изм}}$, если измерялись направления.

Математический анализ выведенной формулы (44) показал, что из двух переменных сомножителей H и $\sqrt{\Sigma(SD)^2}$, определяющих величину M , первый имеет минимум точно в центре вписанной окружности, где, независимо от формы треугольника, равен:

$$H_0 = \frac{2}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{0,667}{S_{\text{ср}}}.$$

Второй сомножитель имеет минимум в точке с координатами:

$$X = \frac{S_1^2 X_1 + S_2^2 X_2 + S_3^2 X_3}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}; \quad Y = \frac{S_1^2 Y_1 + S_2^2 Y_2 + S_3^2 Y_3}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}.$$

Эта точка не совпадает с центром вписанной окружности, но находится вблизи его. Характер изменений двух сомножителей таков, что определяемая точка, имеющая наименьшую ошибку, отстоит от центра вписанной окружности не далее $0,02 \cdot S_{\text{ср}}$, а возможное уменьшение ошибки, по сравнению с ошибкой в центре вписанной окружности, не превышает $0,003 \cdot M$, то есть, практически неощутимо.

Опуская подробности анализа выведенной формулы, математические выкладки которого довольно громоздки, вкратце сформулируем особенности изменения ошибок в зависимости от расположения определяемой точки относительно исходных пунктов.

С наименьшей ошибкой обратной засечкой определяется точка, расположенная вблизи центра вписанной окружности данного твердого треугольника, независимо от его формы. При средней длине стороны треугольника равной 1 км и $m'' = \pm 1''$ ошибка в центре вписанной окружности $\leq [2,3]$ мм, причем 2,3 мм соответствуют центру равноугольного треугольника, где $M_{II} = \pm 2,3 \cdot 10^{-6} \cdot m'' \cdot S$. С отклонением формы треугольника от равноугольной, абсолютная величина минимума ошибки уменьшается, а его местоположение вместе с центром вписанной окружности приближается к вершине большего угла треугольника.

За стороной треугольника ошибка быстро увеличивается, достигая бесконечности на описанной окружности, где $\alpha = A$, поэтому $H = \infty$. За описанной окружностью ошибка вначале уменьшается, достигает второго минимума, а затем вновь безгранично увеличивается. Второй минимум различен в разных местах, но всегда в несколько раз больше первого абсолютного минимума. При равноугольном треугольнике второй минимум составляет от 5 до 14 мм на $m'' \cdot S_{\text{км}}$.

В табл. 2 приводятся еще некоторые частные значения ошибок для равностороннего треугольника, со стороной, равной 1 км, и двух других треугольников, со средней длиной стороны, равной 1 км, при $m'' = \pm 1''$.

Таблица 2

Некоторые частные значения ошибок

	При форме треугольника		
	равносторонней	с углами 30 и 90°	с углами 30 и 120°
Наименьшая ошибка (близ центра вписанной окружности), мм	2,3	2,0	2,0
Наибольшая ошибка в пределах вписанной окружности (в точке касания с короткой стороной), мм	3,8	4,5	5,1
Диаметр вписанной окружности, км	0,58	0,47	0,38
Наибольшая ошибка внутри треугольника (вблизи вершины меньшего угла), мм	4,8	12,5	13,7
Удаление этой вершины от центра вписанной окружности, км	0,58	0,90	0,72

Данные табл. 2 могут быть полезны для предварительных расчетов по проектированию сети. Показатели таблицы изменяются пропорционально ошибке угла и средней длине стороны треугольника.

ВЫВОДЫ

1. Полученные формулы рекомендуются для оценки точности выполненных и проектируемых определений обратной засечкой. При наблюдениях направлений должна применяться формула (44), при наблюдениях углов с уравниванием — формула (39).

В случае вычисления координат по формулам Ансермета для оценки точности удобны формулы (44а) и (34). Для определения ошибок абсциссы и ординаты могут быть применены формулы (46).

Числовые величины для вычисления ошибок могут быть взяты с карты или схемы мелкого масштаба с точностью до 1%.

2. При благоприятном расположении определяемых точек относительно исходных пунктов ошибки весьма малы (табл. 2), что позволяет рекомендовать обратную засечку, учитывая ее экономичность, для весьма точных определений, например при наблюдениях за деформациями (горизонтальными смещениями) гидросооружений. Изменения координат в повторных циклах наблюдений, при использовании одних и тех же пунктов основы, будут свободны от влияния ошибок исходных пунктов и отразят сдвиги наблюдаемых точек с высокой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Реферат. журнал «Астрономия и геодезия», 1957, № 9, 7669.

Работа поступила
20 ноября 1965 г.