

Г. Ф. ЛАВРОВ

УРАВНИВАНИЕ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим вопросы уравнивания и оценки точности уравненных элементов геодезических цепей, коэффициенты нормальных уравнений коррелят которых представляют трехдиагональную симметричную матрицу N с постоянными диагональными и недиагональными коэффициентами. Одновременное решение этих двух вопросов связано с использованием одной и той же обратной матрицы $R=N^{-1}=(\rho_{nij})$ для нахождения поправок v измеренных величин и обратного веса функции уравненных аргументов. Приведем общеизвестные формулы.

Пусть имеем матрицу A_{mn} коэффициентов n условных уравнений с m вероятнейшими поправками v и матрицу W_n свободных членов. Тогда

$$V_{m1}=S_{mn}W_{n1}, \quad (1)$$

$$S_{mn}=-A_{mn}R_{nn}; \quad (2)$$

$$\frac{1}{P_F}=[ff \cdot n]=[ff]-Q. \quad (3)$$

Величина Q , вносимая в обратный вес условными уравнениями, определяется в алгоритмах Гаусса

$$Q=\sum_{i=1}^n \frac{[a_i f \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]}$$

или в матричной форме

$$Q=f^* R f, \quad (4')$$

равносильной двойной сумме

$$Q=\sum_1^n \sum_1^n \rho_{nij} [a_i f] [a_j f], \quad (4)$$

причем транспонированная матрица весовых коэффициентов

$$f^*=||[a_1 f] \dots [a_n f]||,$$

i и j — текущие номера условных уравнений.

Пусть теперь дано добавочное условное уравнение с коэффициентами $b = a_{n+1}$, тогда обратный вес той же функции будет равен в алгоритмах Гаусса

$$\frac{1}{P_F} = [ff \cdot (n+1)] = [ff \cdot n] - \frac{[bf \cdot n]^2}{[bb \cdot n]}. \quad (5)$$

Величины $[bb \cdot n]$ и $[bf \cdot n]$ можно определить по (3) и (4')

$$[bb \cdot n] = [bb] - b^* R b;$$

$$[bf \cdot n] = [bf] - b^* R f,$$

причем по (4)

$$b^* R f = \sum_1^n \sum_1^n \rho_{nij} [a_j b] [a_i f].$$

Следовательно,

$$[bf \cdot n] = [bf] - \sum_{i=1}^n \beta_{ni} [a_i f]; \quad (6)$$

$$\beta_{ni} = \sum_{j=1}^n \rho_{nij} [a_j b]. \quad (7)$$

Обращение трехдиагональной матрицы

Применим приведенные выше формулы для уравнивания и оценки точности однородных геодезических цепей, в которых измеренные величины входят лишь в две смежные фигуры условных уравнений. В таких сетях возникают трехдиагональные симметричные матрицы из коэффициентов нормальных уравнений коррелят. Пусть дана матрица

$$N_n = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & & \\ -a_1 & a_0 & -a_1 & \\ & -a_1 & a_0 & -a_1 \\ & & & \dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

с элементами в алгоритмах Гаусса

$$[a_i a_i] = a_0, \quad i = \overline{1, n}; \quad [a_i a_{i+1}] = -a_1, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Для матриц такого вида квадратические коэффициенты эквивалентных уравнений выражаются последовательными подходящими непрерывной дроби или отношениями целых чисел N :

$$[a_i a_i \cdot (i-1)] = a_0 - \frac{a_1^2}{a_0 - \frac{a_1^2}{a_0 - \dots}} = \frac{N_{i+1}}{N_i},$$

причем числа N определяются из решения рекуррентного уравнения 2-го порядка [1]:

$$N_{i+2} = a_0 N_{i+1} - a_1^2 N_i, \quad (8)$$

а именно

$$N_i = \frac{a_1^{i-1} (q_1^i - q_2^i)}{q_1 - q_2}, \quad q_{1,2} = \frac{a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - 4a_1^2}}{2a_1}, \quad (9)$$

$$N_0 = 0, \quad N_1 = 1, \quad N_2 = a_0, \dots$$

Поскольку $q_1 q_2 = 1$, то алгебраические операции над знаменателями q облегчаются.

Определитель матрицы N_n , как произведение ее преобразованных квадратических коэффициентов, очевидно, равен N_{n+1} .

Индукцией по n можно доказать, что элементы σ союзной матрицы определяются равенством:

$$\sigma_{nij} = a_1^{i-j} N_{n+1-i} N_j, \quad j \leq i. \quad (10)$$

Пределы $j \leq i$ означают разрыв функции σ по главной диагонали. Элементы обратной матрицы R

$$\rho_{nij} = \frac{\sigma_{nij}}{N_{n+1}} \quad (11)$$

можно вычислить по формуле:

$$\rho_{nij} = \frac{(q_1^{n+1-i} - q_2^{n+1-i})(q_1^j - q_2^j)}{a_1(q_1 - q_2)(q_1^{n+1} - q_2^{n+1})}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n. \quad (12)$$

Поскольку матрица N симметрична относительно диагоналей, то симметрична и матрица R относительно каждой диагонали:

$$\rho_{nij} = \rho_{nji} = \rho_{n, n+1-i, n+1-j}$$

Приведенные формулы можно использовать для простого триангуляционного ряда, уравниваемого по направлениям, сдвоенного ряда, уравниваемого по углам или направлениям, трилатерационных рядов из геодезических четырехугольников и центральных систем, простого нивелирного ряда из прямоугольников или квадратов и других. Представляется целесообразным составить для некоторых из этих рядов матрицы R и S в виде специальных таблиц с целью использования их для уравнивания и оценки точности. Элементы обратной матрицы R проще вычислить по формулам (8), (10) и (11), чем по формуле (12), так как N и σ — целые числа; элементы матрицы S — по формуле (1). Следует заметить, что в каждом конкретном ряде одной и той же конструкции, в силу отступления его от правильной (типовой) формы, не всегда будет иметь место (за исключением угловых условий) постоянство коэффициентов a_0 и a_1 матрицы N . Поэтому результаты уравнивания и оценки точности, выполненные по типовым таблицам, будут приближенными.

Формулы (3), (4) и (12) можно использовать для вывода обратного веса элементов определенного ряда. Перейдем к этим выводам. Прежде всего в выражении (12) заменим обратную величину $(q_1^{n+1} - q_2^{n+1})$ приближенной величиной q_2^{n+1} с несущественной относительной ошибкой порядка q_2^{2n+2}

$$\rho_{nij} = \frac{1}{a_1(q_1 - q_2)} (q_2^i - q_2^{2n+2} q_1^i) (q_1^j - q_2^j), \quad 1 \leq j \leq i \leq n. \quad (12')$$

Для краткости будем считать $n - k = r$.

Придавая индексам i и j определенные значения, получим частные значения ρ , например:

$$\begin{aligned} \rho_{n11} &= \rho_{nnn} = \frac{q_2}{a_1}, \\ \rho_{nkk} &= \frac{1 - q_2^{2k} - q_2^{2r+2}}{a_1(q_1 - q_2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая прерывность функции ρ , можно получить их простые или двойные суммы [1] по правилам суммирования функции с одной или с двумя переменными, например:

$$\sum_{j=1}^n \rho_{nij} = \frac{1 - (1 - q_2^{n+1})(q_2^i + q_2^{n+i-1})}{a_1(q_1 + q_2 - 2)}; \quad (14)$$

$$\sum_1^k \sum_1^k \rho_{nij} = \frac{(q_1 - q_2)k - (2 + q_2) + 2(1 + q_2)(q_2^k + q_2^{n+r+1}) - (q_2^{2r+1} + q_2^{2k+1})}{a_1(q_1 - q_2)(q_1 + q_2 - 2)}, \quad (15)$$

Ошибки уравненных элементов простого нивелирного ряда из квадратов

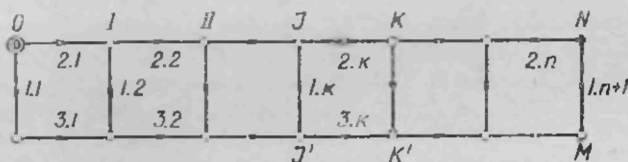
Для простого свободного ряда нивелировки, состоящего из квадратов с равноточно-измеренными превышениями по каждому звену (см. рисунок) условные уравнения имеют вид:

$$-(1 \cdot i) + (2 \cdot i) - (3 \cdot i) + (1 \cdot i + 1) + w_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (a)$$

Поэтому по $n \cdot 2$ имеем:

$$a_0 = 4; \quad a_1 = 1; \quad q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}. \quad (16)$$

Оценим точность уравненных превышений по звеньям IK и NM , а затем — уравненных отметок текущей и конечной точек K и N .



Простой нивелирный ряд из квадратов.

Приращения весовых функций и весовые коэффициенты соответственно будут:

$$\Delta F_{JK} = (2 \cdot k); \quad [ff] = 1; \quad [a_k f] = 1; \quad (17.1)$$

$$\Delta F_{NM} = (1 \cdot n + 1); \quad [ff] = 1; \quad [a_n f] = 1; \quad (17.2)$$

$$\Delta F_K = \sum_{i=1}^k (2 \cdot i); \quad [ff] = k; \quad [a_i f] = 1; \quad (17.3)$$

$$\Delta F_N = \sum_{i=1}^n (2 \cdot i); \quad [ff] = n; \quad [a_i f] = 1. \quad (17.4)$$

Используя формулы (3), (4), (13) и (16), для обратных весов превышений напомним:

$$\frac{1}{P_{JK}} = [ff] - \rho_{nkk} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} (1 - q_2^{2k} - q_2^{2r+2}); \quad (18)$$

$$\frac{1}{P_{NM}} = [ff] - \rho_{nnn} = 1 - q_2 = \sqrt{3} - 1.$$

Следовательно, квадраты ожидаемых ошибок превышений

$$\begin{aligned} m_{JK}^2 &= (0,71 + 0,27^{2k+1} + 0,27^{2r+3}) \eta^2; \\ m_{NM}^2 &= 0,73 \eta^2, \end{aligned} \quad (19)$$

η — средняя квадратическая ошибка измеренного превышения по звену.

Аналогично для уравновешенной отметки точки K с учетом (15) получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_K} &= [ff] - \sum_1^k \sum_1^k p_{nij} = \\ &= \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} (q_2^k + q_2^{n+r+1}) + \frac{1}{4\sqrt{3}} (q_2^{2k+1} + q_2^{2r+1}). \end{aligned} \quad (20)$$

С некоторым упрощением

$$m_k^2 = \left(\frac{k}{2} + 0,327 - 0,37 q_2^k \right) \eta^2. \quad (21)$$

В частности ($k=n$, $r=0$), ошибка отметки конечной точки N :

$$m_N^2 = \left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \sqrt{3} q_2^{n+1} \right) \eta^2. \quad (21')$$

Если даны два твердых репера O и N (см. рисунок), то к n условиям полигонов добавится уравнение жесткости

$$\sum_{i=1}^n (2 \cdot i) + w_{n+1} = 0 \quad (6)$$

с коэффициентами b_i , которые совпадают с коэффициентами f_i весовой функции (17.4) отметки конечной точки N свободного ряда. Поэтому по (21') можно написать:

$$[bb \cdot n] = [ff \cdot n]_N = \frac{1}{2} (n + 0,732 - 2\sqrt{3} q_2^{n+1}). \quad (22)$$

Учитывая, что $[a_i b] = 1$, согласно (7), (14) и (16), получим

$$\beta_{ni} = \sum_{j=1}^n p_{nij} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (q_2^i + q_2^{n+1-i}) (1 - q_2^{n+1}). \quad (23)$$

Выполнив суммирование над β_{ni} , получим

$$\sum_{i=1}^k \beta_{ni} = \frac{1}{2} \left(k - \frac{1 - q_2^k + q_2^r}{q_1 - 1} \right). \quad (24)$$

Для определяемого превышения по звену JK и отметки точки K , согласно (6), будем иметь:

$$[bf \cdot n]_{JK} = 1 - \beta_{nk} [a_k f] = \frac{1}{2} (1 + q_2^k + q_2^{r+1});$$

$$[bf \cdot n]_K = k - \sum_{i=1}^k \beta_{ni} = \frac{k}{2} + 0,183 (1 + q_2^r - q_2^k).$$

Согласно равенству (5), с учетом полученных обратных весов определяемых элементов свободного ряда и выражений $[bf \cdot n]$ и $[bb \cdot n]$ напишем для несвободного ряда

$$\frac{1}{P_{JK}} = 0,71 - \frac{1 + 2q_2^k + 2q_2^{r+1}}{2(n + 0,73 - 2\sqrt{3}q_2^{n+1})}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{P_K} = \frac{k}{2} + 0,327 - 0,37q_2^k - \frac{[k + 0,37(1 + q_2^r - q_2^k)]^2}{2(n + 0,73 - q_2^n)}.$$

Для вычисления ошибок уравненного превышения промежуточного звена можно пользоваться формулой:

$$m_{JK}^2 = \frac{1,42n + 2q_2^k + 2q_2^{r+1}}{2n + 1,5} \eta^2; \quad (26)$$

здесь нижние знаки в числителе относятся к звену $J'K'$.

Ошибка уравненной отметки промежуточной точки K вычисляется по упрощенной формуле

$$m_K^2 = \frac{kr + \frac{1}{3}(2n + 1)}{2n + 1,5} \eta^2. \quad (27)$$

Ошибку m_{cc} превышения самого слабого звена и ошибку m_c в отметке самой слабой узловой точки несвободного ряда можно вычислить по формулам:

$$m_{cc}^2 = \frac{1,42n + 2 \cdot 2^{-n}}{2n + 1,5} \eta^2;$$

$$m_c^2 = \frac{0,5n^2 + 1,3n + 0,6}{4n + 3} \eta^2. \quad (28)$$

Уравновешивание несвободного ряда удобно выполнить двухгрупповым методом, отнеся во вторую группу условия жесткости. Первичные поправки v' вычисляем по формуле (2), а для вычисления вторичных поправок v'' в измеренные величины используем обратную матрицу R .

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лавров. Оценка точности элементов сдвоенного триангуляционного ряда, уравненного по направлениям. Исследования по геодезии и фотограмметрии Львовского политехнического института. Научн. зап., сер. геодез, № 5, Львов, 1959.
2. А. И. Мазмишвили, Б. И. Беляев. Способ наименьших квадратов. Геодезиздат, М., 1959.

Работа поступила
6 октября 1965 г.