

И. Ф. МОНИН

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФИГУРЫ ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ПО АНОМАЛИЯМ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Аномальный вертикальный градиент земного ускорения $\frac{\partial \Delta g}{\partial z}$, как известно, весьма успешно используется в геофизике и геологии для интерпретации аномальных масс, составляющих земную кору. Пока еще не удалось осуществить портативного прибора, пригодного для полевых измерений $\frac{\partial \Delta g}{\partial z}$. Однако, учитывая большие возможности современного точного приборостроения, можно надеяться, что в скором будущем такой прибор будет изготовлен. В связи с этим представляет несомненный интерес изучение вопроса об использовании измеренных значений $\frac{\partial \Delta g}{\partial z}$ на земной поверхности для определения ее фигуры.

Задача об определении фигуры регуляризованного геоида по данным $\frac{\partial \Delta g}{\partial z}$ рассматривалась С. В. Громовым [3]. Такая же задача, как в [3], иными методами решена в работах [4, 10]. В настоящем исследовании рассматривается задача об определении внешнего гравитационного поля и фигуры топографической поверхности Земли по измеренным значениям $\frac{\partial \Delta g}{\partial z}$. Точность полученных ниже формул равна произведению вычисляемой по соответствующей формуле величины на сжатие отсчетного эллипсоида.

Формулы для возмущающего потенциала

Зависимость между возмущающим потенциалом T , смешанными аномалиями силы тяжести Δg , потенциалом Земли на уровне моря W_0 и потенциалом уровня отсчетного эллипсоида на его поверхности U_0 выражается, как известно [6], для любой точки внешнего пространства следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{2T}{z} = -\Delta g + \frac{2}{z}(W_0 - U_0), \quad (1)$$

где z — радиус-вектор фиксированной точки внешнего пространства (начало координат взято в центре отсчетного эллипсоида и совпадает с центром инерции Земли).

Дифференцируя (1) по z , получаем исходное уравнение, которое позволяет определять возмущающий потенциал во внешнем пространстве по данным $\frac{\partial \Delta g}{\partial z}$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{2T}{z^2} = - \frac{\partial \Delta g}{\partial z} - \frac{2}{z^2} (W_0 - U_0). \quad (2)$$

1. Представим гармоническую и регулярную в бесконечности функцию $z \frac{\partial T}{\partial z}$ потенциалом простого слоя плотности μ , распределенного на поверхности S (в качестве которой принимается поверхность, получаемая отложением от отсчетного эллипсоида вдоль его нормалей нормальных высот):

$$z \frac{\partial T}{\partial z} = \int \frac{\mu}{r_1} dS, \quad (3)$$

$$r_1^2 = z^2 + \rho^2 - 2z\rho \cos \psi,$$

ρ — радиус-вектор текущей точки поверхности S ;

ψ — угол между ρ и z (когда фиксированная точка находится на поверхности S , то $z = \rho_0$, $r_1 = r$).

Умножая уравнение (3) на $\frac{dz}{z}$ и интегрируя по z в пределах от $z > \rho_0$ до $z \rightarrow \infty$, находим

$$-T = \int \mu E dS, \quad (4)^*$$

где

$$E = \int_z^\infty \frac{dz}{z r_1} = \left\{ -\frac{1}{\rho} \ln(-2\rho z \cos \psi + 2\rho^2 + 2\rho r_1) \frac{1}{z} \right\}_z^\infty = \frac{1}{\rho} \ln \frac{\rho - z \cos \psi}{z(1 - \cos \psi)} + r_1. \quad (5)$$

Чтобы найти плотность простого слоя μ , используем уравнение (2). Подставляя в него (3), (4) и

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{1}{z^2} \int \frac{\mu}{r_1} dS + \frac{1}{z} \int \mu \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{1}{r_1} dS,$$

и переходя на поверхность S , получим интегральное уравнение относительно μ :

$$\frac{2\pi}{\rho_0} \mu \cos \alpha - \int \mu E_1 dS = \delta, \quad (6)$$

где

$$E_1 = \frac{1}{\rho_0^2} \left(\frac{1}{r} + 2E + \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0} \cdot \frac{1}{r} \right), \quad (7)$$

$$\delta = \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho_0} + \frac{2}{\rho_0^2} (W_0 - U_0). \quad (8)$$

Найдем решение уравнения (6), применяя метод малого параметра [5]. Пусть

$$\mu \sec \alpha = \omega, \quad (9)$$

* Эта формула впервые получена В. В. Броваром в работе, опубликованной в Известиях вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, 1964, № 3.

Замечая, что $\cos \alpha dS \approx d\Sigma$, где α — угол между ρ и нормалью поверхности S , $d\Sigma$ — элемент поверхности сферы радиуса a , перепишем уравнение (6)

$$\frac{2\pi}{\rho_0} \omega \cos^2 \alpha - \int \omega E_1 d\Sigma = \delta. \quad (10)$$

Теперь преобразуем поверхность S , вычисляя радиусы-векторы по формуле

$$\bar{\rho} = a + kH,$$

где a — большая полуось отсчетного эллипсоида;

H — нормальная высота;

k — малый постоянный параметр.

Для преобразованной поверхности имеем

$$\frac{2\pi}{\rho_0} \omega \cos^2 \bar{\alpha} - \int \omega \bar{E}_1 d\Sigma = \bar{\delta}. \quad (11)$$

Положив

$$\bar{\omega} = \sum_0^{\infty} k^m \omega_m, \quad \bar{\delta} = \delta$$

и, зная, что

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 &\approx r_0^2 (1 + k^2 v_1^2), \quad \operatorname{tg} \bar{\alpha} = k \operatorname{tg} \alpha, \\ \bar{E}_1 &= \frac{1}{2r_0} + \frac{2}{a} \ln \left(1 + \frac{2a}{r_0} \right) + \sum_1^{\infty} k^m t_m, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_0 &= 2a \sin \frac{\psi}{2}, \quad v_1 = \frac{H - H_0}{r_0}, \\ t_1 &= \left(\frac{a}{r_0^2} + \frac{4}{r_0 + 2a} \right) v_1, \quad t_2 = \left\{ \frac{6ar_0 + 2r_0^2}{a(r_0 + 2a)^2} - \frac{1}{4r_0} \right\} v_1^2, \\ t_3 &= - \left\{ \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{r_0^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2a^2 + 9ar_0 + 3r_0^2}{(r_0 + 2a)^3} \right\} v_1^3, \dots \\ \sum_0^{\infty} \omega_m &= \omega, \end{aligned} \quad (12)$$

из уравнения (11) получаем систему интегральных уравнений

$$\frac{2\pi}{a} \omega_m - \frac{1}{a^2} \int \omega_m \left\{ \frac{1}{2r_0} + \frac{2}{a} \ln \left(1 + \frac{2a}{r_0} \right) \right\} d\Sigma = G_m, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} G_0 &= \delta, \\ G_1 &= \frac{1}{a^2} \int \omega_0 t_1 d\Sigma, \\ G_2 &= \frac{1}{a^2} \int (\omega_1 t_1 + \omega_0 t_2) d\Sigma + \frac{2\pi}{a} \omega_0 \operatorname{tg}^2 \alpha, \\ G_3 &= \frac{1}{a^2} \int (\omega_2 t_1 + \omega_1 t_2 + \omega_0 t_3) d\Sigma + \frac{2\pi}{a} \omega_1 \operatorname{tg}^2 \alpha, \dots \end{aligned}$$

Будем искать решение уравнения (13) в виде бесконечного ряда сферических функций

$$\omega_m = \sum_0^{\infty} (\omega_m)_n. \quad (13a)$$

Тогда, полагая, что и правая часть уравнения (13) может быть разложена в бесконечный ряд сферических функций, из уравнения (13) найдем зависимость между сферическими функциями порядка n :

$$(\omega_m)_n = \frac{a}{4\pi} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{(n-1)(n+2)} (G_m)_n. \quad (14)$$

В самом деле, воспользовавшись известным разложением

$$\frac{1}{r_1} = \sum_0^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n+1}} P_n(\cos \psi), \quad (15)$$

из формулы (5) легко получить:

$$\sum_0^{\infty} \left(\frac{\rho}{z}\right)^{n+1} \frac{P_n(\cos \psi)}{n+1} = \ln \frac{\rho - z \cos \psi + r_1}{z(1 - \cos \psi)}. \quad (16)$$

Принимая $z = \rho$, имеем

$$\ln \left(1 + \frac{2a}{r_0}\right) = \sum_0^{\infty} \frac{P_n(\cos \psi)}{n+1}. \quad (17)$$

Теперь, подставляя в уравнение (13) разложения (13a), (15), (17) и применяя теорему восстановления сферических функций, после несложных вычислений получаем соотношение (14).

Таким образом, решение уравнения (13) есть

$$\omega_m = \frac{a}{(4\pi)^2} \int G_m F_1 d\sigma, \quad (18)$$

где

$$F_1 = \sum_0^{\infty} \frac{(n+1)(2n+1)^2}{(n-1)(n+2)} P_n(\cos \psi),$$

$d\sigma$ — элемент поверхности единичной сферы.

Просуммируем ряд F_1 . Для этого разложим дробь на простейшие. Имеем

$$F_1 = 3 \sum_0^{\infty} \frac{P_n(\cos \psi)}{n+2} + 4 \sum_0^{\infty} (n+1) P_n(\cos \psi) + 6 \sum_0^{\infty} \frac{P_n(\cos \psi)}{n-1}. \quad (19)$$

Принимая во внимание легко получаемые равенства (см. [5, стр. 59, 220])

$$\sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \psi) = 0,$$

$$\sum_2^{\infty} \frac{u^{n-1}}{n-1} P_n(\cos \psi) = \frac{1}{u} \left(1 - u \cos \psi - \sqrt{1 - 2u \cos \psi + u^2} \right) - \cos \psi \ln \frac{1 - u \cos \psi + \sqrt{1 - 2u \cos \psi + u^2}}{2}, \quad (20)$$

$$\sum_0^{\infty} u^n P_n(\cos \psi) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2u \cos \psi + u^2}},$$

нетрудно найти все ряды, входящие в выражение (19). Так, из первого равенства с учетом (15) находим

$$\sum_0^{\infty} (n+1) P_n(\cos \psi) = \frac{a}{2r_0}.$$

Второе равенство при $u=1$ дает

$$\sum_0^{\infty} \frac{P_n(\cos \psi)}{n-1} = -\cos \psi - 2 \sin \frac{\psi}{2} - \cos \psi \ln \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \right).$$

Умножая третье равенство на u и интегрируя в пределах от 0 до u , получаем

$$\sum_0^{\infty} \frac{u^{n+2}}{n+2} P_n(\cos \psi) = -1 + \sqrt{1 - 2u \cos \psi + u^2} + \cos \psi \ln \frac{u - \cos \psi + \sqrt{1 - 2u \cos \psi + u^2}}{1 - \cos \psi}, \quad (21)$$

а приняв $u=1$, найдем

$$\sum_0^{\infty} \frac{P_n(\cos \psi)}{n+2} = -1 + 2 \sin \frac{\psi}{2} + \cos \psi \ln \left(1 + \csc \frac{\psi}{2} \right).$$

Следовательно,

$$F_1 = \csc \frac{\psi}{2} - 3 - 6 \cos \psi - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 3 \cos \psi \ln \sin^3 \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right).$$

2. Возмущающий потенциал во внешнем пространстве можно определить иначе по данным $\frac{\partial \Delta g}{\partial z}$. Приведем другое решение той же задачи.

Запишем исходное уравнение (2) в несколько ином виде

$$z^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial T}{\partial z} - 2T = -z^2 \frac{\partial \Delta g}{\partial z} - 2(W_0 - U_0). \quad (22)$$

Простыми вычислениями можно доказать, что функция $z^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ гармоническая и регулярная в бесконечности; из-за недостатка места мы этого доказательства не приводим. Отсюда следует, что левая часть уравнения (22) тоже есть гармоническая и регулярная в бесконечности функ-

ция. Представим ее потенциалом простого слоя плотности ν , распределенного на поверхности S . Получаем два уравнения

$$z^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial T}{\partial z} - 2T = \int \frac{\nu}{r_1} dS, \quad (23)$$

$$\int \frac{\nu}{r} dS = -\rho_0^2 \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho_0} - 2(W_0 - U_0). \quad (24)$$

Первое уравнение позволяет определять T по ν . Второе — ν по данным $\frac{\partial \Delta g}{\partial z}$. Решим эти уравнения.

Пусть

$$T = \int \frac{\lambda}{r_1} dS, \quad (25)$$

где λ — плотность простого слоя. Тогда, воспользовавшись разложением (15), нетрудно вычислить производные

$$\frac{\partial T}{\partial z} = - \int \lambda \sum_0^{\infty} (n+1) \frac{\rho^n}{z^{n+2}} P_n(\cos \psi) dS,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \int \lambda \sum_0^{\infty} (n+1)(n+2) \frac{\rho^n}{z^{n+3}} P_n(\cos \psi) dS,$$

а подставляя их и (25) в уравнение (23), после преобразований получаем

$$\int \lambda \rho^n P_n(\cos \psi) dS = \frac{\int \nu \rho^n P_n(\cos \psi) dS}{(n-1)(n+2)}. \quad (26)$$

Теперь по формуле (25) с учетом (15) и (26) находим возмущающий потенциал

$$T = \int \nu E_2 dS, \quad (27)$$

где

$$E_2 = \sum_0^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n+1}} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{(n-1)(n+2)}.$$

Выполним суммирование этого ряда. Разложив, как мы делали раньше, дробь на простейшие, получим

$$E_2 = \frac{1}{3} \sum_0^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n+1}} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{n-1} - \frac{1}{3} \sum_0^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n+1}} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{n+2}.$$

Подставив сюда ряды (20) и (21), заменив в них u через $\frac{\rho}{z}$, приходим к результату:

$$\begin{aligned} -E_2 = & \frac{z}{3\rho^2} \left\{ -1 + \frac{r_1}{z} + \cos \psi \ln \frac{\rho - z \cos \psi + r_1}{z(1 - \cos \psi)} \right\} + \\ & + \frac{\rho}{3z^2} \left(\cos \psi + \frac{r_1}{\rho} + \cos \psi \ln \frac{z - \rho \cos \psi + r_1}{2z} \right). \end{aligned}$$

Уравнение (24) с другой правой частью решено нами в работе [7]. Применяя соответствующие формулы из работы [7], запишем решение уравнения (24):

$$v = \cos \alpha \sum_0^{\infty} v_m, \quad (28)$$

$$v_m = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int (p'_m - p_m) \frac{d\Sigma}{r_0^3} + \frac{p_m}{4\pi a}; \quad (m=0, 1, 2, \dots),$$

$$p_0 = -\rho_0^2 \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho_0} - 2(W_0 - U_0),$$

$$p_1 = 0,$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \int v_0 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0}, \quad p_3 = 0, \dots$$

Итак, формулы (4) и (27) позволяют разными путями вычислять по измеренным значениям $\frac{\partial \Delta g}{\partial z}$ возмущающий потенциал во внешнем пространстве. Постоянная $W_0 - U_0$ должна быть определена из специально составленных уравнений градусных измерений (см. [5]). Высоты квазигеоида и уклонения отвеса на топографической поверхности Земли с точностью малых величин порядка сжатия легко находятся по формулам (4) и (27). Получим формулу (27) другим путем. Для этого придадим уравнению (23) следующий вид:

$$z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (z^2 T) \right\} = \int \frac{v}{r_1} dS.$$

Умножая его на $\frac{dz}{z^2}$ и интегрируя в пределах от z до ∞ , находим

$$\left\{ \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (z^2 T) \right\}_z^{\infty} = \int v m_1 dS, \quad (23_1)$$

где

$$m_1 = \int_z^{\infty} \frac{dz}{z^2 r_1}.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, применим разложение (15). Имеем

$$m_1 = \int_z^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n+3}} P_n(\cos \psi) dz = \sum_0^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n+2}} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{n+2}.$$

При $z \rightarrow \infty$ функция $\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} (z^2 T) \rightarrow 0$. Следовательно, из уравнения (23₁) получаем

$$-\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} (z^2 T) = \int v \sum_0^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n+2}} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{n+2} dS.$$

Теперь это уравнение умножим на $z^2 dz$ и проинтегрируем в пределах от z до ∞ . Получим

$$-(z^2 T)_z^{\infty} = \int v m_2 dS,$$

где

$$m_2 = \int_z^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{\rho^n}{z^n} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{n+2} dz = \frac{1}{2} (z_{\infty} - z) + \sum_2^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n-1}} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{(n-1)(n+2)},$$

$$z_{\infty} = \infty.$$

В работе [7] нами показано, что при больших значениях z

$$(z^2 T)_{\infty} = f \Delta M z_{\infty},$$

где

$$\Delta M = M_3 - M_e,$$

M_3 M_e — массы Земли и уровенного отсчетного эллипсоида,
 f — гравитационная постоянная.

Таким образом,

$$T = \frac{z_{\infty}}{z^2} \cdot f \Delta M + \int v \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{z_{\infty}}{z^2} - \frac{1}{z} \right) + \sum_2^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n+1}} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{(n-1)(n+2)} \right\} dS,$$

и мы приходим к формуле (27), помня, что

$$-\frac{1}{2z} + \sum_2^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n+1}} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{(n-1)(n+2)} = E_2; \quad f \Delta M = -\frac{1}{2} \int v dS.$$

В общем случае, когда центр инерции Земли не совпадает с центром отсчетного эллипсоида,

$$T' = T + Z_1,$$

где Z_1 — произвольная сферическая функция первого порядка. При этом малая ось отсчетного эллипсоида должна быть параллельна оси вращения Земли. Три постоянные сферической функции зависят от ориентировки эллипсоида в теле Земли.

Случай геоида

С. В. Громов [3], решая аналогичную задачу в случае геоида, допустил досадную неточность. Так, при составлении уравнения (2) он пренебрег некоторыми членами такого же порядка, как и оставшиеся. Поэтому его основное уравнение, аналогичное нашему (2), неверно. Неверна поэтому и формула С. В. Громова для возмущающего потенциала.

Исправим решение С. В. Громова [3]. Представим возмущающий потенциал во внешнем пространстве, как это делал С. В. Громов, в виде ряда сферических функций:

$$T = \sum_0^{\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^{n+1} T_n. \quad (29)$$

Тогда, разложив и правую часть уравнения (2) в бесконечный ряд сферических функций

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial z} + \frac{2}{z^2} (W_0 - U_0) = \delta = \sum_0^{\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^{n+1} \delta_n,$$

из уравнения (2) при $z=a$ находим зависимость между сферическими функциями порядка n :

$$T_n = \frac{a^2 \delta_n}{(n-1)(n+2)}. \quad (30)$$

Подставляя (30) в формулу (29) и применяя теорему восстановления сферических функций, получаем

$$T = \frac{a^2}{4\pi} \int \delta' F d\sigma, \quad (31)$$

где

$$F = \sum_0^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^{n+1} \frac{2n+1}{(n-1)(n+2)} P_n(\cos \psi).$$

Найдем сумму этого ряда. Легко видеть, что

$$F = \sum_0^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^{n+1} \frac{P_n(\cos \psi)}{n+2} + \sum_0^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^{n+1} \frac{P_n(\cos \psi)}{n-1},$$

а применяя ряды (20) и (21), находим

$$F = \frac{z}{a} \left\{ -1 + \frac{r_1}{z} + \cos \psi \ln \frac{a - z \cos \psi + r_1}{z(1 - \cos \psi)} \right\} - \frac{a^2}{z^2} \left(\cos \psi + \frac{r_1}{a} + \cos \psi \ln \frac{z - a \cos \psi + r_1}{2z} \right), \quad (32)$$

где

$$r_1^2 = z^2 + a^2 - 2za \cos \psi,$$

a — радиус сферы, равный большой полуоси отсчетного эллипсоида;
 δ' — значение δ на геоиде.

Приняв в формуле (31) $z=a$, получим возмущающий потенциал на геоиде. В этом случае

$$F = -1 - \cos \psi - \cos \psi \ln \sin^2 \frac{\psi}{2}.$$

Формулу (31) можно получить из формул (4) и (27), если в последних пренебречь рельефом Земли.

В заключение отметим, что формула (4) и отчасти (27) получены нами по методу Дини, которым пользуются в математической физике для решения внутренней и внешней задач Неймана. В теории фигуры Земли к этому методу прибегали Пизетти [8], Идельсон и Малкин [11] при определении фигуры геоида и В. В. Бровар [1, 2]* при определении топографической поверхности Земли. Что касается представления гармонических функций потенциалами простого или двойного слоя, то в отличие от Бровара мы руководствовались хорошо известными положениями, известными из книги Л. Н. Сретенского [9] (стр. 126—129, 152—157).

* В отличие от предыдущих авторов В. В. Бровар впервые представил инвариантную гармоническую функцию в виде потенциалов простого и двойного слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Бровар. Решение некоторых внешних краевых задач для земной поверхности. Известия вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 1, М., 1963.
2. В. В. Бровар. О решении краевой задачи Молоденского. Известия вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 4, М., 1963.
3. С. В. Громов. Определение фигуры Земли через аномалии вертикального градиента ускорения силы тяжести. Ученые записки ЛГУ, № 307, сер. мат. наук, вып. 36, Л., 1962.
4. Н. К. Мигаль. Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. Научные записки ЛПИ, сер. геодез., № 1, Львов, 1949.
5. М. С. Молоденский и др. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли, Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, 1960.
6. И. Ф. Монин. К определению фигуры регуляризованного геоида. Известия вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 5, М., 1960.
7. И. Ф. Монин. Об определении фигуры и внешнего гравитационного поля Земли. Республиканский межведомственный научно-технический сборник. Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 2. Изд-во Львовского ун-та, 1965.
8. П. Пицетти. Основы механической теории фигуры планет. ГТТИ, 1933.
9. Л. Н. Сретенский. Теория ньютоновского потенциала. Гостехиздат, М.—Л., 1946.
10. Bragard Lucien. Recherches sur le géoïde. Mém. Soc. roy. sci. Liège, 1958, 1, № 1.
11. N. Idelson und N. Malkin. Die Stokssche Formel in der Geodäsie als Lösung einer Randwertaufgabe. Gerlands Beiträge zur Geophysik, B. 29, 1931.

Работа поступила
28 сентября 1965 г.