В. И. РУДСКИЙ

НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ ПЕРЕДАЧИ АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И АЗИМУТА

Полученные нами ранее [1] формулы передачи астрономических координат и азимута с одного пункта триангуляции на другой в одиночном треугольнике справедливы для случая, когда треугольник лежит справа от линии, по которой производится передача или, иными словами, если последовательная передача координат и азимута в треугольнике происходит по ходу часовой стрелки.

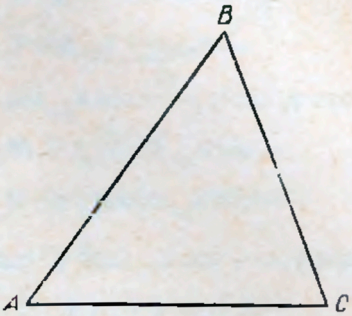

Рис. 1.

Делая выводы, аналогичные прежним, мы убедимся, что при передаче астрономических координат и азимута, например, с пункта A на пункт C (рис. 1), то есть при обходе вершин треугольника в процессе передачи против хода часовой стрелки, формулы примут вид:

$$\cos\varphi_3\cos\lambda_{1,3}=\cos z_{3,1}(\sin\varphi_1\cos\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}-\cos\varphi_1\cos z_{1,3})-$$
$$-L_2[\sin\varphi_1(\cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}-\cos\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}\cos A_1)-$$
$$-\cos\varphi_1(\cos z_{1,2}-\cos z_{1,3}\cos A_1)]-M_2[\sin\varphi_1(\sin\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}\cos z_{1,3}-$$
$$-\sin\alpha_{1,3}\cos z_{1,2}\sin z_{1,3})-\cos\varphi_1\sin z_{1,2}\sin z_{1,3}\sin a_1]$$
$$\cos\varphi_3\sin\lambda_{1,3}=-\sin\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}\cos z_{3,1}+L_2(\sin\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}-$$
$$-\sin\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}\cos A_1)-M_2(\cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}\cos z_{1,3}-\cos\alpha_{1,3}\cos z_{1,2}\sin z_{1,3});$$
$$\sin\varphi_3=-\cos z_{3,1}(\cos\varphi_1\cos\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}+\sin\varphi_1\cos z_{1,3})+$$
$$+L_2[\cos\varphi_1(\cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}-\cos\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}\cos A_1)+$$
$$+\sin\varphi_1(\cos z_{1,2}-\cos z_{1,3}\cos A_1)]-M_2[\cos\varphi_1(\sin\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}\cos z_{1,3}-$$
$$-\sin\alpha_{1,3}\cos z_{1,2}\sin z_{1,3})+\sin\varphi_1\sin z_{1,2}\sin z_{1,3}\sin a_1]$$

и

$$\sin\alpha_{3,1}=\frac{(\cos\varphi_1\cos z_{1,3}-\sin\varphi_1\cos\alpha_{1,3}\sin z_{1,3})\sin\lambda_{1,3}-\sin\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}\cos\lambda_{1,3}}{\sin z_{3,1}}. \quad (1)$$

Здесь

$$L_2=\frac{\cos z_{3,2}-\cos z_{3,1}\cos A_3}{\sin A_1\sin A_3},\quad M_2=\frac{\sin z_{3,1}\sin z_{3,2}\sin a_3}{\sin A_1\sin A_3}.$$

Формулу (1) запишем в ином виде. Для этого умножим обе ее части на $\cos\varphi_3$. После преобразований получим:

$$\sin\alpha_{3,1} = \frac{1}{\cos\varphi_3 \sin z_{3,1}} \{L_2 [\cos\varphi_1 (\sin\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos z_{1,3} - \sin\alpha_{1,3} \cos z_{1,2} \sin z_{1,3}) + \sin\varphi_1 \sin z_{1,2} \sin z_{1,3} \sin a_1] - M_2 [\cos\varphi_1 (\cos\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} - \cos\alpha_{1,3} \sin z_{1,3} \cos A_1) + \sin\varphi_1 (\cos z_{1,2} - \cos z_{1,3} \cos A_1)]\}.$$

В общем случае для одиночного треугольника можем записать:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\varphi_2 \cos\lambda_{1,2} = \cos z_{2,1} (\sin\varphi_1 \cos\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} - \cos\varphi_1 \cos z_{1,2}) + \\
&\quad + L_1 [\sin\varphi_1 (\cos\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos A_1 - \cos\alpha_{1,3} \sin z_{1,} + \\
&\quad + \cos\varphi_1 (\cos z_{1,3} - \cos z_{1,2} \cos A_1)] + \\
&\quad + M_1 [\cos\varphi_1 \sin z_{1,2} \sin z_{1,3} \sin a_1 \mp \sin\varphi_1 (\sin\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos z_{1,3} - \\
&\quad - \sin\alpha_{1,3} \cos z_{1,2} \sin z_{1,3})]; \\
&\cos\varphi_2 \sin\lambda_{1,2} = -\sin\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos z_{2,1} - L_1 (\sin\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos A_1 - \\
&\quad - \sin\alpha_{1,3} \sin z_{1,3}) \mp M_1 (\cos\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos z_{1,3} - \\
&\quad - \cos\alpha_{1,3} \cos z_{1,2} \sin z_{1,3}); \\
&\sin\varphi_2 = -\cos z_{2,1} (\cos\varphi_1 \cos\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} + \sin\varphi_1 \cos z_{1,2}) - \\
&\quad - L_1 [\cos\varphi_1 (\cos\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos A_1 - \cos\alpha_{1,3} \sin z_{1,3}) - \\
&\quad - \sin\varphi_1 (\cos z_{1,3} - \cos z_{1,2} \cos A_1)] + \\
&\quad + M_1 [\sin\varphi_1 \sin z_{1,2} \sin z_{1,3} \sin a_1 \pm \\
&\quad \pm \cos\varphi_1 (\sin\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos z_{1,3} - \sin\alpha_{1,3} \cos z_{1,2} \sin z_{1,3})]; \\
&\sin\alpha_{2,1} = \frac{1}{\cos\varphi_2 \sin z_{2,1}} \{L_1 [\cos\varphi_1 (\sin\alpha_{1,3} \cos z_{1,2} \sin z_{1,3} - \\
&\quad - \sin\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos z_{1,3}) \mp \\
&\quad \mp \sin\varphi_1 \sin z_{1,2} \sin z_{1,3} \sin a_2] \pm M_1 [\cos\varphi_1 (\cos\alpha_{1,3} \sin z_{1,3} - \\
&\quad - \cos\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos A_1) + \sin\varphi_1 (\cos z_{1,3} - \cos z_{1,2} \cos A_1)]\},
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где

$$L_1 = \frac{\cos z_{2,3} - \cos z_{2,1} \cos A_2}{\sin A_1 \sin A_2}, \quad M_1 = \frac{\sin z_{2,1} \sin z_{2,3} \sin a_2}{\sin A_1 \sin A_2}. \quad (3)$$

В формулах (2) и (3) индексы обозначают:
1 — исходный пункт;
2 — определяемый пункт;
3 — третий пункт треугольника.

При этом верхний знак в формулах ставится в том случае, когда треугольник расположен справа от стороны 1—2, а нижний — когда треугольник располагается слева от нее.

Запишем выражения (2) в ином виде. Для этого воспользуемся рис. 2. Представим, что треугольник ABC лежит в плоскости рисунка. Вокруг некоторой точки O этой плоскости построим вспомогательную полусферу, основание которой на рисунке изображено окружностью. Из каждого пункта треугольника перенесем в точку O параллельно самим себе отвесные линии, которые в пересечении с полусферой дадут точки k_1, k_2, k_3. Стороны треугольника $k_1k_2k_3$ представляют собой дуги $u_{i,n}$ равные углам между отвесными линиями. Через O проведем визирные прямые в направлениях $A \rightleftarrows B$, $A \rightleftarrows C$, $B \rightleftarrows C$, а также вертикальные плоскости.

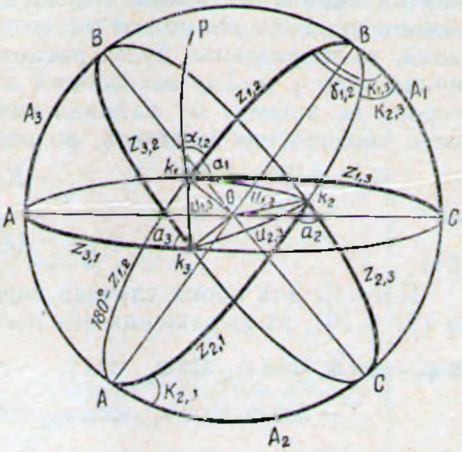

Рис. 2.

Обозначим через $K_{i,n}$ угол сферического треугольника, лежащий против стороны $z_{i,n}$ (дуги зенитного расстояния с пункта i на пункт n).

Согласно формулам сферической тригонометрии, запишем, например:

$$\cos K_{1,3} = \frac{\cos z_{1,3} - \cos z_{1,2} \cos A_1}{\sin z_{1,2} \sin A_1}, \tag{4}$$

$$\sin K_{1,3} = \frac{\sin z_{1,3} \sin a_1}{\sin A_1}. \tag{5}$$

Используя соотношения вида (4) и (5), выражения (2) после ряда преобразований запишем так:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\varphi_2 \cos\lambda_{1,2} = \sin z_{2,1} \{\sin\varphi_1 [\cos\alpha_{1,2} \cos z_{1,2} \cos(K_{1,3} - K_{2,3}) \pm \\
&\quad \pm \sin\alpha_{1,2} \sin(K_{1,3} - K_{2,3})] + \cos\varphi_1 \sin z_{1,2} \cos(K_{1,3} - K_{2,3})\} + \\
&\quad + \cos z_{2,1} (\sin\varphi_1 \cos\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} - \cos\varphi_1 \cos z_{1,2});\\
&\cos\varphi_2 \sin\lambda_{1,2} = -\sin\alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos z_{2,1} - \\
&\quad - \sin z_{2,1} [\sin\alpha_{1,2} \cos z_{1,2} \cos(K_{1,3} - K_{2,3}) \mp \cos\alpha_{1,2} \sin(K_{1,3} - K_{2,3})];\\
&\sin\varphi_2 = \sin z_{2,1} \{\sin\varphi_1 \sin z_{1,2} \cos(K_{1,3} - K_{2,3}) - \\
&\quad - \cos\varphi_1 [\cos\alpha_{1,2} \cos z_{1,2} \cos(K_{1,3} - K_{2,3}) \pm \\
&\quad \pm \sin\alpha_{1,2} \sin(K_{1,3} - K_{2,3})]\} - \cos z_{2,1} (\sin\varphi_1 \cos z_{1,2} + \\
&\quad + \cos\varphi_1 \cos\alpha_{1,2} \sin z_{1,2});\\
&\sin\alpha_{2,1} = \frac{-[\sin\alpha_{1,2} \cos(K_{1,3} - K_{2,3}) \mp \cos\alpha_{1,2} \cos z_{1,2} \sin(K_{1,3} - K_{2,3})] \cos\varphi_1 \mp \sin\varphi_1 \sin z_{1,2} \sin(K_{1,3} - K_{2,3})}{\cos\varphi_2}.
\end{aligned}\right| \tag{6}$$

Но, согласно рис. 2,

$$K_{1,3}-K_{2,3}=\gamma_{1,2}, \tag{7}$$

где $\gamma_{1,2}$ — угол между взаимными вертикальными сечениями в пунктах A и B.

Это соотношение справедливо для случая, когда треугольник находится справа от линии передачи. Если же передачу координат и азимута производить по той же стороне, но в противоположном направлении, то треугольник будет расположен с левой стороны. Так как величина угла γ между взаимными вертикальными сечениями по данной стороне не зависит от направления передачи, то, учитывая принятые ранее обозначения индексов, во втором случае будем иметь:

$$\gamma_{1,2}=K_{2,3}-K_{1,3} \tag{8}$$

или

$$\gamma_{1,2}=-(K_{1,3}-K_{2,3}). \tag{9}$$

И тогда для обоих случаев передачи координат и азимута, согласно (7) и (9), из выражения (6) получим:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\varphi_2 &= \sin\varphi_1(\sin z_{1,2}\sin z_{2,1}\cos\gamma_{1,2}-\cos z_{1,2}\cos z_{2,1})-\\
&\quad-\cos\varphi_1[\cos\alpha_{1,2}(\cos z_{1,2}\sin z_{2,1}\cos\gamma_{1,2}+\sin z_{1,2}\cos z_{2,1})+\\
&\quad+\sin\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}\sin\gamma_{1,2};\\
\sin\lambda_{1,2} &= \frac{-\sin\alpha_{1,2}(\cos z_{1,2}\sin z_{2,1}\cos\gamma_{1,2}+\sin z_{1,2}\cos z_{2,1})}{\cos\varphi_2}+\\
&\quad+\frac{+\cos\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}\sin\gamma_{1,2}}{\cos\varphi_2}\\
\sin\alpha_{2,1} &= \frac{\cos\varphi_1(\cos\alpha_{1,2}\cos z_{1,2}\sin\gamma_{1,2}-\sin\alpha_{1,2}\cos\gamma_{1,2})}{\cos\varphi_2}-\\
&\quad-\frac{-\sin\varphi_1\sin z_{1,2}\sin\gamma_{1,2}}{\cos\varphi_2}.
\end{aligned}\right| \tag{10}$$

Из сказанного можно сформулировать следующее правило для вычисления угла γ:

Угол $\gamma_{1,2}$ между взаимными вертикальными сечениями в пунктах 1 и 2 вычисляется по формуле (7). При этом 1—2 — то направление, относительно которого треугольник, служащий для вычисления $\gamma_{1,2}$, лежит справа.

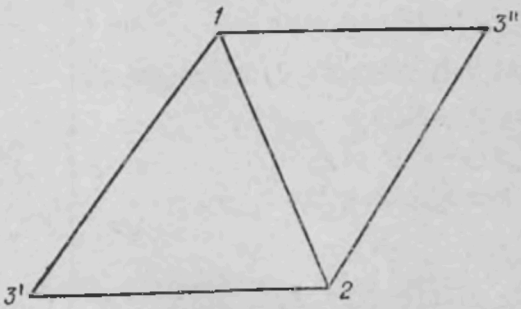

Рис. 3.

В качестве примера реализации этого правила воспользуемся звеном триангуляции, состоящем из двух треугольников (рис. 3). Из рисунка видно, что угол $\gamma_{1,2}$ между взаимными вертикальными сечениями в пунктах *1* и *2* смежной стороны треугольников может быть вычислен как из треугольника *123'*, лежащего справа от направления *1—2*, так и из треугольника *123''*, лежащего слева от этого направления.

Тогда, согласно сформулированному правилу, можем написать, что

$$\gamma_{1,2}=K_{1,3'}-K_{2,3'} \tag{11}$$

и

$$\gamma_{2,1}=\gamma_{1,2}=K_{2,3''}-K_{1,3''}. \tag{12}$$

Углы γ вообще очень незначительны (порядка величин уклонений отвесных линий). В этом случае, ограничиваясь первыми членами разложений функций $\gamma_{1,2}$, после простого преобразования (10) представим в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\varphi_2 &= -\sin\varphi_1\cos(z_{1,2}+z_{2,1}) - \\
&\quad -\cos\varphi_1\left[\cos\alpha_{1,2}\sin(z_{1,2}+z_{2,1}) + \frac{\gamma''_{1,2}}{\rho''}\sin\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}\right]; \\
\sin\lambda_{1,2} &= \frac{-\sin\alpha_{1,2}\sin(z_{1,2}+z_{2,1}) + \frac{\gamma''_{1,2}}{\rho''}\cos\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}}{\cos\varphi_2}; \\
\sin\alpha_{2,1} &= -\frac{\cos\varphi_1\left(\sin\alpha_{1,2} - \frac{\gamma''_{1,2}}{\rho''}\cos\alpha_{1,2}\cos z_{1,2}\right) + \frac{\gamma''_{1,2}}{\rho''}\sin\varphi_1\sin z_{1,2}}{\cos\varphi_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Из этих формул и из предыдущих выводов видно, что наибольший объем вычислений приходится на угол γ, который находим из выражений (4), (5), (7) и (5) работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудский В. И. Передача астрономических координат с одного пункта на другой. Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 2. Изд-во Львовского ун-та, 1965.

Работа поступила
26 октября 1965 г.